11. Słabo znaczy mocno

1. Twierdzenie. *Niech T_t bedzie mocno ciągłą półgrupą kontrakcji na przestrzeni Banacha X. Niech U będzie jej generatorem. Zdefiniujmy „słaby” generator $\widetilde{U}$ jako operator*

$$\widetilde{U}x = w\text{-}\lim_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t}$$

na dziedzinie tych $x \in X$, dla których ta słaba granica istnieje. Wtedy $\widetilde{U} = U$.

Zauważmy, że dla każdego $x \in D_{\widetilde{U}}$ i każdego $\xi \in X'$ funkcja $[0,\infty) \ni t \to < T_t x, \xi >$ jest ciągła i ma ciągłą prawostronną pochodną, więc jest klasy C^1. Ponadto

$$\frac{d}{dt} < T_t x, \xi > = < T_t \widetilde{U} x, \xi > .$$

Wobec tego

$$< T_t x, \xi > - < x, \xi > = \int_0^t < T_s \widetilde{U} x, \xi > ds,$$

czyli

$$T_t x = x + \int_0^t T_s y \, ds, \qquad y = \widetilde{U} x,$$

skąd natychmiast wynika, że $x \in D_U$. Inkluzja $U \subset \widetilde{U}$ jest oczywista.

2. Lemat. *Niech $f : [0,1] \to X$ będzie funkcją słabo ciągłą. Wtedy wzór*

$$F(\xi) = \int_0^1 < f(t), \xi > dt$$

*definiuje funkcjonał F na X', który jest ciągły w topologii *słabej. Innymi słowy, istnieje wektor $x_0 \in X$, taki że*

$$< x_0, \xi > = \int_0^1 < f(t), \xi > dt, \qquad \xi \in X'.$$

Zacznijmy od uwagi, że F jest niewątpliwie ciągłym funkcjonałem na X' i wobec tego może być utożsamiony z elementem przestrzeni X''. My natomiast chcemy czegoś więcej. Dowodzimy, że F „pochodzi” od elementu X.

Jako, że odcinek $[01,]$ jest przestrzenią ośrodkową, $X_0 = \operatorname{lin} f([0,1])$ jest podprzestrzenią X ośrodkową we słabej topologii, a więc także i w mocnej. Zatem możemy przyjąć, że X jest ośrodkowa. Wtedy jednak X' jest metryzowalna w topologii *słabej i wystarczy wykazać, że dla każdego ciągu $\xi_n \in X'$ zbieżnego *słabo do zera $F(\xi_n)$ zbiega do zera. Dodajmy, że zarówno zbiór $f([0,1])$, jak i ciąg funkcjonałow ξ_n są ograniczone, więc nasza teza wynika z twierdzenia Lebesgue'a dla ograniczonego ciągu funkcji ciągłych

$$\varphi_n(t) = < f(t), \xi_n >$$

zbieżnego punktowo do zera.

3. Twierdzenie. *Słabo ciągła półgrupa kontrakcji na przestrzeni Banacha X jest w istocie mocno ciągła.*

Dla $0 < \delta < 1$, $x \in X$ oraz $\xi \in X'$ niech

$$< x_\delta, \xi > = \delta^{-1} \int_0^\delta < T_s x, \xi > ds.$$

Lemat 2 pokazuje, że x_δ jest poprawnie zdefiniowanym elementem przestrzeni X. Co więcej, przestrzeń liniowa

$$D = \operatorname{lin}\{x_\delta : \|x\| \leqslant 1,\ 0 < \delta < 1\}$$

jest słabo gęsta w X, a więc także gęsta. Wystarczy więc pokazać, że dla każdego $0 < \delta < 1$ i każdego $\|x\| \leqslant 1$

$$T_t x_\delta \to x_\delta, \qquad t \to 0,$$

a tak jest, bo dla $0 < t < \delta$ i $\|\xi\| \leqslant 1$

$$
\begin{aligned}
| < T_t x_\delta - x_\delta, \xi > | &\leqslant \delta^{-1} \left| \int_t^{t+\delta} < T_s x, \xi > ds - \int_0^\delta < T_s x, \xi > ds \right| \\
&\leqslant \delta^{-1} \int_0^t ds + \delta^{-1} \int_\delta^{\delta+t} ds = \frac{2t}{\delta},
\end{aligned}
$$

a więc

$$
\|T_t x_\delta - x_\delta\| \leqslant \frac{2t}{\delta}.
$$