12. Różniczkowalność i holomorficzność

1. **Lemat.** *Niech (T_t) będzie mocno ciągłą pólgrupą operatorów na X z generatorem A. Niech $x \in X$. Odwzorowanie $t \to T_t x$ jest różniczkowalne w punkcie $t_0 > 0$, wtedy i tylko wtedy gdy $T_{t_0} x \in D_A$. Wtedy też*

$$T_t' x = AT_t x,$$

a jeśli $x \in D_A$, to

$$T_t' x = AT_t x = T_t Ax.,$$

2. Mówimy, że mocno ciągła półgrupa (T_t) jest *różniczkowalna*, jeśli dla każdego $x \in X$ odwzorowanie $t \to T_t x$ jest różniczkowalne na $(0, \infty)$.

3. **Lemat.** *Jeśli półgrupa (T_t) jest różniczkowalna, to odwzorowanie $t \to T_t x$ ma pochodne wszystkich rzędów i*

$$T_t^{(n)} x = \left(nT'_{t/n} x\right)^n, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

4. **Przykład.** Niech $X = C([0,1]$ i $T_t f(x) = \chi_{x+t \leqslant 1}(x) f(x+t)$. Nietrudno zauważyć, że jest to mocno ciągła półgrupa kontrakcji z generatorem będącym domknięciem operatora

$$Af(x) = f'(x), \qquad f \in C^1([0,1]).$$

Zauważmy, że dla każdego $f \in X$ jest $T_t f = 0$, a więc $t \to T_t f$ jest różniczkowalne jest różniczkowalne na $(1, \infty)$. Natomiast nie dla wszystkich f jest ono różniczkowalne na $[0,1]$.

5. **Jednoznaczność transformaty Laplace'a.** *Niech $f : [0, \infty) \to \boldsymbol{C}$ będzie ciągłą funkcją o wzroście wykładniczym, to znaczy spełniającą oszacowanie*

$$|f(t)| \leqslant Ce^{Ct}, \qquad t \geqslant 0.$$

Jeśli dla dostatecznie dużych $\operatorname{Re} z$

$$\int_0^\infty f(t) e^{-tz}\, dt = 0,$$

to $f = 0$.

6. **Twierdzenie.** *Niech A będzie gęsto określonym operatorem domkniętym, takim że dla pewnego $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$*

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{M}{|\lambda|}, \qquad |\arg \lambda| < \varphi_0.$$

Wtedy A jest generatorem infinitezymalnym mocno ciągłej ograniczonej półgrupy operatorów (T_t) na X. Ponadto

$$T_t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{t\lambda} R_\lambda \, d\lambda,$$

gdzie

$$\Gamma(r) = \begin{cases} re^{-i\varphi}, & r \leqslant -\varphi, \\ e^{ir}, & -\varphi \leqslant r \leqslant \varphi), \\ re^{i\varphi}, & r \geqslant \varphi, \end{cases}$$

dla dowolnie wybranego $\pi/2 < \varphi_< \varphi_0$.

Dowód przeprowadzimy w trzech krokach:

7. Niech

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{t\lambda} R_\lambda \, d\lambda, \qquad t > 0.$$

Modyfikując kontur Γ, tak by jego część Γ_0 omijająca 0 biegła po okręgu $|z| = t^{-1}$, widzimy, że

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \|e^{t\lambda} R_\lambda\| \, d\lambda \leqslant \frac{M|\varphi|}{2\pi} \int_{|r| \leqslant 1/t} t \, dr = \frac{M|\varphi|}{\pi} \leqslant M,$$

bo

$$\Gamma_0(t) = t^{-1}e^{itr\varphi}, \qquad -t^{-1} \leqslant r \leqslant t^{-1}.$$

Mamy też

$$\frac{1}{2\pi}\int_{1/t}^{\infty} |e^{tre^{i\varphi}}| \cdot \|R_{re^{i\varphi}}\| dr \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_1^{\infty} \frac{e^{r\cos\varphi}}{r}\, dr < \infty$$

oraz bardzo podobne oszacowanie dla pozostałej całki po promieniu $re^{-i\varphi}$. Zatem

$$\|U(t)\| \leqslant C, \qquad t > 0.$$

8. Pokażemy teraz, że dla każdego $\lambda > 0$

$$R_\lambda = \int_0^\infty e^{-t\lambda}U(t)\, dt.$$

W tym celu obliczamy całkę

$$\int_0^T e^{-t\lambda}U(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^T e^{-t\lambda}\left(\int_\Gamma e^{tz}R_z\, dz\right) dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\int_0^T e^{t(z-\lambda)}dt\right) R_z\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(1 - e^{T(z-\lambda)}\right)\frac{R_z\, dz}{\lambda - z} = R_\lambda + I(T),$$

gdzie

$$\|I(T)\| \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|e^{T(z-\lambda)}dz|}{|z||\lambda - z|}.$$

Jeśli zmodyfikujemy kontur Γ, tak by zawsze było $\operatorname{Re} z \leqslant \lambda/2$, okaże się, że $I(T) \to 0$, gdy $T \to \infty$.

9. Jak wiadomo,

$$R_\lambda^n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}R_\lambda,$$

a stąd i ze wzoru (8) nietrudno wyprowadzić oszacowanie

$$\|R_\lambda^n\| \leqslant \frac{C}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}dt = \frac{C}{\lambda^n}, \qquad \lambda > 0,$$

które pokazuje, że operator A spełnia założenia twierdzenia Hille-Yosidy. Jeśli (T_t) jest mocno ciągłą ograniczoną półgrupą operatorów generowaną przez A, to ze względu na jednoznaczność transformaty Laplace'a musi być $T_t = U(t)$, co kończy nasz dowód.