13. Twierdzenie charakteryzujące półgrupy holomorficzne

1. Mocno ciągła półgrupa operatorów (T_t) na przestrzeni Banacha X nazywa się *holomorficzna*, jeśli istnieje $\varphi_0 > 0$, takie że odwzorowanie $t \to T_t$ przedłuża się z półprostej $(0, \infty)$ do holomorficznego odwzorowania $z \to T_z$ sektora

$$S_{\varphi_0} = \{z \in C : |\arg z| < \varphi_0\}.$$

2. Lemat. *Jeśli półgrupa (T_t) jest holomorficzna w sektorze $|\arg z| < \varphi_0$, to*

$$T_z T_u = T_{z+u}, \qquad |\arg z|, |\arg u| < \varphi_0.$$

3. Lemat. *Jeśli półgrupa (T_t) jest holomorficzna i ograniczona w sektorze $S = S_{\varphi_0}$, to*

$$\lim_{S \ni z \to 0} T_z x = x. \qquad x \in X.$$

Niech A będzie generatorem półgrupy. Z holomorficzności wynika, że $T_z' x = T_z A x$ dla $x \in D_A$. Niech więc $x \in D_A$ i $z \in S$. Jeśli $z \to 0$, to $t = \operatorname{Re} z \to 0$ oraz

$$\|T_z x - T_t x\| \leqslant \int_{[t,z]} \|T_u' x\| \cdot |du| \leqslant C_0 |z - t| \|Ax\|,$$

skąd, pamiętając że operatory T_z są wspólnie ograniczone w normie, otrzymujemy tezę.

4. Twierdzenie. *Niech będzie dana mocno ciągła ograniczona półgrupa (T_t) operatorów na przestrzeni X z generatorem A. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

a) Półgrupa (T_t) jest różniczkowalna oraz

$$\|T_t'\| \leqslant \frac{C}{t}, \qquad 0 < t \leqslant 1,$$

b) Półgrupa (T_t) jest holomorficzna i $\|T_z\| \leqslant C_0$ w sektorze $|\arg z| < \varphi_0$,

c) Istnieje stała $M > 0$, taka że

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{M}{|\lambda|}, \qquad \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

d) Istnieje $\pi/2 < \psi_0 < \pi$ i stała $K > 0$, taka że

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{K}{|\lambda|}, \qquad |\arg \lambda| \leqslant \psi_0.$$

0.1. *Uwaga.* Jeśli w warunku a) jest $C < 1/e$, to półgrupa (T_t) jest ciągła w normie i rozszerza się holomorficznie na całą płaszczyznę. Wtedy bowiem funkcja $t \to T_t x$ ma pochodne wszystkich rzędów oraz

$$\|T_1^{(n)} x\| = \|A^n T_1 x\| = \| \left(T_{1/n}'\right)^n x\| \leqslant (Cn)^n \|x\|, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

skąd wynika, że szereg potęgowy

$$T_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_1^{(n)}}{n!} (t-1)^n$$

ma promień zbieżności większy od 1, więc

$$||T_t - I\| \to 0, \qquad t \to 0,$$

a to już jest nasza teza. Pozostaje dodać, że wtedy generator A jest operatorem ograniczonym, więc szukane holomorficzne rozszerzenie przyjmuje postać

$$T_z = e^{zA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} z^n, \qquad z \in \boldsymbol{C}.$$

5. Przykłady. 1) Jeśli μ jest miarą podprobabilistyczną, to $P = \mu - \delta_0$ jest funkcjonałem generującym półgrupy miar typu poissonowskiego, która jest holomorficzna w swoim działaniu na $C_0(\boldsymbol{R}^d)$ i $L^p(\boldsymbol{R}^d)$ dla $1 \leqslant p < \infty$. Rzeczywiście, w tym wypadku generator jest operatorem ograniczonym.

2) Każda symetryczna półgrupa miar jest holomorficzna w swoim działaniu na $L^2(\boldsymbol{R}^d)$. Istotnie, jeśli ψ jest transformatą Fouriera funkcjonału generującego, to operatory

$$T_z f(x) = \int e^{ix\xi} e^{z\psi(\xi)} \widehat{f}(\xi)\, d\xi, \qquad f \in L^2(\boldsymbol{R}^d),\ \operatorname{Re} z \geqslant 0,$$

są ograniczone wspólnie na $L^2(\boldsymbol{R}^d)$, bo $|e^{z\psi(\xi)}| = e^{\operatorname{Re} z \cdot \psi(\xi)} \leqslant 1$ dla $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

3) Symetryczne półgrupy stabilne na $\boldsymbol{R}^d$ są holomorficzne na $C_0(\boldsymbol{R}^d)$ i $L^p(\boldsymbol{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$. W szczególności dotyczy to półgrup Gaussa i Cauchy'ego. Jeśli oznaczymy przez h_1 gęstość miary μ_1, to decydujące są oszacowania

$$h_1() \leqslant \frac{c}{(1+|x|)^{d+\alpha}}, \qquad |D_j h_1(x)| \leqslant \frac{C}{(1+|x|)^{d+\alpha+1}}.$$

4) Półgrupa translacji $T_t f(x) = f(x+t)$ na $L^2(\boldsymbol{R})$ nie jest holomorficzna, ani nawet różniczkowalna.

6. Dowód Twierdzenia rozbijemy na ciąg implikacji:

a) $\Longrightarrow$ b). Ustalmy $t_0 > 0$. Z założenia wynika, że funkcja $t \to T_t x$ ma pochodne wszystkich rzędów oraz

$$\|T_{t_0}^{(n)} x\| \leqslant \left(\frac{Cn}{t_0}\right)^n \|x\|, \qquad n \geqslant t_0,$$

skąd wynika, że szereg potęgowy

$$T_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{t_0}^{(n)}}{n!} (\lambda - t_0)^n$$

jest zbieżny w normie operatorowej dla

$$|\lambda - t_0| < \frac{t_0}{Ce},$$

a więc po uwzględnieniu dowolności $t_0 > 0$ dla $|\arg \lambda| < \varphi_0$, gdzie $\varphi_0 = \arcsin(Ce)^{-1}$.

Zmniejszamy nieznacznie φ_0, tzn. zastępujemy przez $0 < \varphi_1 < \varphi_0$, zachowując nazwę. Istnieje $0 < k < 1$, takie że dla każdego $|\arg \lambda| < \varphi_0$ istnieje $t > 0$, takie że

$$|\lambda - t| < \frac{kt}{Ce},$$

a więc

$$\|T_\lambda\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Cn/t)^n}{n!} \left(\frac{kt}{Ce}\right)^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty, \qquad |\arg \lambda| < \varphi_0.$$

b) $\Longrightarrow$ c). Niech $\lambda = \alpha + i\beta$, gdzie $\alpha > 0$. Załóżmy najpierw, że $\beta \leqslant 0$. Niech $0 < \varphi < \varphi_0$ i $\varphi < \pi/4$. Wiedząc, że $\|T_{re^{i\varphi}}\| \leqslant C_0$ dla $r > 0$, mamy

$$R_\lambda = \int_{z=re^{i\varphi}} e^{-\lambda z} T_z dz = e^{i\varphi} \int_0^\infty e^{-r\lambda e^{i\varphi}\lambda} T_{re^{i\varphi}} dr,$$

skąd

$$\|R_\lambda\| \leqslant C_0 \int_0^\infty e^{-r(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)} dr \leqslant \frac{C_0}{\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi} \leqslant \frac{C_0/\sin\varphi}{|\lambda|},$$

bo wtedy

$$\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi = \cos\theta \cdot |\lambda|,$$

gdzie $|\theta| < \pi/2 - \varphi$ jest kątem pomiędzy wektorami $(\alpha, -\beta)$ i $(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Jeśli $\beta > 0$, postępujemy podobnie, całkując wzdłuż promienia $z = re^{-\varphi}$.

c) $\implies$ d). Niech $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, gdzie $\alpha_0 > 0$. Mamy

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} R_{\lambda_0}^{n+1}(\lambda_0 - \lambda)^n, \qquad |\lambda - \lambda_0| < \frac{\lambda_0}{M}.$$

Widzimy, że do zbioru rezolwenty należą liczby $\lambda = \alpha + i\beta_0$, takie że

$$|\alpha - \alpha_0| < \frac{|\lambda|}{M},$$

a ponieważ $\alpha_0 > 0$ jest dowolne, warunek ten będzie konsekwencją

$$|\alpha| < \frac{|\lambda|}{M},$$

co dowodzi, że dla pewnego $\pi/2 < \psi_0 < \pi$ sektor $\pi - \psi_0 < |\arg\lambda| < \psi_0$ zawiera się w rezolwencie generatora A.

Zmniejszamy nieznacznie ψ_0. Jeśli $\lambda = \alpha + i\beta$ i $\pi - \psi_0 < |\arg\lambda| < \psi_0$, to w związku z tym $|\lambda - \lambda_0| < \frac{k|\lambda_0|}{M}$ dla pewnego $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta$, $\alpha_0 > 0$, i $0 < k < 1$. Wtedy

$$\|R_\lambda\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^{n+1}}{|\lambda_0|^n}|\lambda - \lambda_0|^n \leqslant \frac{M}{|\lambda_0|}\sum_{n=0}^{\infty} k^n \leqslant \frac{K}{|\lambda|}.$$

d) $\implies$ a). Jak już wiemy, warunek c) pociąga możliwość reprezentacji półgrupy w postaci

$$T_t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda} R_\lambda \, d\lambda,$$

gdzie

$$\Gamma(r) = \begin{cases} re^{-i\varphi_0}, & r \leqslant -\varphi, \\ e^{ir}, & -\varphi \leqslant r \leqslant \varphi, \\ re^{i\varphi}, & r \geqslant \varphi, \end{cases}$$

dla dowolnie wybranego $\pi/2 < \varphi_< \varphi_0$. Dlatego

$$\|T_t'\| \leqslant K\int_\Gamma |e^{t\lambda}||dz| \leqslant K\left(C_1 + 2\int_0^\infty e^{-tr|\cos\varphi|}dr\right) \leqslant \frac{C}{t}, \qquad 0 < t \leqslant 1.$$