14. Wzór perturbacyjny

1. Twierdzenie. *Niech T_t będzie mocno ciągłą półgrupą operatorów na przestrzeni Banacha X spełniającą ograniczenie $\|T_t\| \leqslant Me^{wt}$. Niech A będzie generatorem tej półgrupy, a B pewnym operatorem ograniczonym. Wtedy $A+B$ jest generatorem mocno ciągłej półgrupy S_t spełniającej ograniczenie $\|S_t\| \leqslant Me^{(w+M\|B\|)t}$.*

2. *Dowód:* Mamy

$$\lambda - (A+B) = (\lambda - A)\Big(I - (\lambda - A)^{-1}B\Big),$$

a więc dla $\lambda > w + M\|B\|$

$$\Big(\lambda - (A+B)\Big)^{-1} = \Big(I - (\lambda - A)^{-1}B\Big)^{-1}(\lambda - A)^{-1}$$

oraz

$$\|\Big(\lambda - (A+B)\Big)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{\lambda - w - M\|B\|}.$$

To za mało, by skorzystać z twierdzenia Hille-Yosidy. Aby to zrobić, wprowadzamy w X nową równoważną normę $\|\cdot\| \leqslant |\cdot| \leqslant M\|\cdot\|$, taką, że $|T_t| \leqslant e^{wt}$. Powtarzamy poprzednie rozumowanie, które daje

$$|\Big(\lambda - (A+B)\Big)^{-1}| \leqslant \frac{1}{\lambda - w - |B|},$$

skąd wynika, że $A+B$ jest generatorem mocno ciągłej półgrupy operatorówq S_t o normach

$$\|S_t\| \leqslant M|S_t| \leqslant Me^{t(w+|B|)} \leqslant Me^{t(w+M\|B\|)}.$$

3. *Jeśli T_t i S_t są jak wyżej, to dla każdego $x \in \mathcal{D}_A$ funkcja wektorowa $t \mapsto S_t x$ jest jedynym ciągłym rozwiązaniem równania całkowego*

$$V(t)x = T_t x + \int_0^t T_{t-s} B V(s) x \, ds.$$

Ponadto,

$$S_t x = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) x,$$

gdzie $V_0(t)x = T_t x$ oraz

$$V_{n+1}(t)x = \int_0^t T_{t-s} B V_n(s) x \, ds.$$

4. *Dowód:* Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że

$$\frac{d}{dt} V(t)x = (A+B)V(t)x, \qquad V(0)x = x,$$

co daje pierwszą część tezy. Dla dowodu drugiej kluczowe jest oszacownie norm

$$\|V_n(t)\| \leqslant Me^{tw}\frac{(t\|B\|)^n}{n!},$$

co uzyskujemy przez indukcję.

5. Przykład. Niech P będzie UL na $\boldsymbol{R}^d$, a μ_t generowaną przez niego półgrupą miar (podprobabilistycznych). Niech $\varphi \in C_c^\infty$ będzie nieujemna i równa 1 w otoczeniu 0. Wtedy, jak wiemy, $P_0 = \varphi P$ jest też UL generującym półgrupę miar ν_t. Obie półgrupy związane są zależnością

$$\mu_t = \nu_t + \int_0^t \mu_{t-s} \star \eta \star \nu_s \, ds,$$

gdzie $\eta = P - P_0$ jest miarą ograniczoną. W szczególności, $\nu_t \leqslant \mu_t$.