15. Zbieżność półgrup kontrakcji

1. Twierdzenie. *Niech A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, będą generatorami mocno ciągłych półgrup kontrakcji na przestrzeni Banacha X o wspólnej istotnej dziedzinie $\mathcal{D}$. Jeśli*

$$A_n x \to A_0 x, \qquad x \in \mathcal{D},$$

to

$$(\zeta - A_n)^{-1} x \to (\zeta - A_0)^{-1} x, \qquad x \in X,$$

niemal jednostajnie względem $\operatorname{Re}\zeta > 0$.

2. *Dowód:* Niech $R_n = (\zeta - A_n)^{-1}$. Mamy

$$\|R_n x - R_0 x\| \leqslant \|R_n(A_0 - A_n)R_0 x\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\zeta}\|A_0 R_0 x - A_n R_0 x\|,$$

bo $\|R_n\| \leqslant 1/\operatorname{Re}\zeta$. A więc $R_n x \to R_0 x$ dla x z gęstej podprzestrzeni $R_0^{-1}(\mathcal{D})$, a to wystarczy, bo R_n są jednakowo ciągłe.

3. Twierdzenie. *Niech A_n będą generatorami półgrup kontrakcji w X. Jeśli dla pewnego* $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$$(\lambda - A_n)^{-1} x \to (\lambda - A_0)^{-1} x, \qquad x \in X,$$

to

$$e^{tA_n} x \to e^{tA_0} x, \qquad x \in X,$$

niemal jednostajnie względem $t \geqslant 0$.

4. Dowód: Niech $R_0 = (\lambda - A_0)^{-1}$, $R_n = (\lambda - A_n)^{-1}$. Zauważmy, że

$$\frac{d}{ds} R_n e^{(t-s)A_n} e^{sA_0} R_0 = \lambda e^{(t-s)A_n}(R_0 - R_n)e^{sA_0} x, \qquad x \in X,$$

a więc

$$R_n(e^{tA_0} - e^{tA_n})R_0 x = \int_0^t e^{(t-s)A_n}(R_n - R_0)e^{sA_0} x\, ds,$$

skąd wynika, że $R_n(e^{tA_0} - e^{tA_n})R_0 x \to 0$. Ale

$$R_n e^{tA_0} x = e^{tA_0} R_0 x + \mathrm{o}(1), \qquad R_n e^{tA_n} x = e^{tA_n} R_0 x + \mathrm{o}(1),$$

więc

$$(e^{tA_0} - e^{tA_n})y \to 0, \qquad y = R_0^2 x,$$

a podprzestrzeń $R_0^2(X)$ jest gęsta.

5. Twierdzenie. *Niech A_n będą generatorami półgrup kontrakcji w X. Jeśli*

$$e^{tA_n} x \to e^{tA_0} x, \qquad x \in X,\ t > 0,$$

to

$$(\lambda - A_n)^{-1} x \to (\lambda - A_0)^{-1} x, \qquad x \in X,$$

niemal jednostajnie względem $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

6. *Dowód:* Wystarczy skorzystać ze wzoru całkowego

$$\|\Big((\lambda - A_n)^{-1} - (\lambda - A_0)^{-1}\Big)x\| \leqslant \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda t}\|e^{tA_n}x - e^{tA_0}x\|\, dt$$

i twierdzenia Lebesgue'a.

7. Wniosek. *Jeśli*

$$e^{tA_n} x \to e^{tA_0} x, \qquad x \in X,\ t > 0,$$

to zbieżność jest niemal jednostajna względem t.

8. Przykład. Na przestrzeni $X = C_0(\boldsymbol{R})$ definiujemy ciąg operatorów różnicowych

$$A_n f(x) = n(T_{1/n} - I)f = n\Big(f(x+1/n) - f(x)\Big).$$

Są to operatory ograniczone i dysypatywne generujące półgrupy kontrakcji $U_n(t) = e^{tA_n}$. Nieech $Af = f'$ na dziedzinie

$$\mathcal{D} = \{f \in C_0(\boldsymbol{R}) : f \in AC, f' \in C_0(\boldsymbol{R})\}.$$

Jak widać,

$$\lim_{n\to\infty} A_n f = Af, \qquad f \in \mathcal{D}.$$

Na mocy Twierdzeń 1 i 3 $e^{tA_n}f \to e^{tA}f$, czyli

$$f(x+t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A_n^k f(x),$$

gdzie zbieżność jest jednostajna względem x i niemal jednostajna względem $t \geqslant 0$. Kładąc $x = 0$, otrzymujemy

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A_n^k f(0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{kn}}{k!} t^k$$

niemal jednostajnie dla $t \geqslant 0$.

9. Przykład. Niech $q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R})$, będzie taka, że

$$(*) \qquad \int_a^b |q(x)|^2 \, dx = \infty, \qquad a < b.$$

Dla każdego n

$$U_n(t)f(x) = e^{\frac{i}{n}\int_x^{x+(1+1/n)t} q(s)\, ds} f(x+t), \qquad f \in L^2(\boldsymbol{R}),$$

jest mocno ciągłą półgrupą kontrakcji na $L^2(\boldsymbol{R})$. Niech A_n bedzie odpowiednim generatorem o dziedzinie $\mathcal{D}_n$. Nietrudno zauważyć, że

$$U_n(t)f \to T(t)f, \qquad f \in L^2(\boldsymbol{R}),$$

gdzie $T(t)f(x) = f(x+t)$ z generatorem A o dziedzinie $\mathcal{D}$. Tymczasem, $\mathcal{D}_n \cap \mathcal{D} = \{0\}$, bo gdyby niezerowa funkcja f należała do obu dziedzin, mielibyśmy

$$A_n f = \frac{i}{n} qf + Af \in L^2(\boldsymbol{R}) \text{ oraz } Af \in L^2(\boldsymbol{R}),$$

co implikuje $qf \in L^2(\boldsymbol{R})$. To jednak jest niemożliwe, bo $f \in \mathcal{D}$ jest ciągła, a q spełnia (*).