16. Pseudorezolwenta

1. Rodzina operatorów ograniczonych $J(\lambda)$, gdzie λ przebiego zbiór otwarty $U \subset \boldsymbol{C}$, nazywa się *pseudorezolwentą*, jeśli dla każdych $\lambda, \mu \in U$

$$J(\mu) - J(\lambda) = (\lambda - \mu)J(\mu)J(\lambda).$$

2. *Jeśli $J(\lambda)$, $\lambda \in U$, jest pseudorezolwentą, to operatory $J(\lambda)$ komutują, mają wspólny obraz i wspólne jądro.*

To że operatory pseudorezolwenty komutują i mają wspólne jądro wynika wprost ze wzoru pseudorezolwenty. Aby zobaczyć, że mają wspólny obraz, wystarczy ten wzór przekształcić do postaci

$$J(\mu) = J(\lambda)\Big((\lambda - \mu)J(\mu) + I\Big).$$

3. *Pseudorezolwenta $J(\lambda)$, $\lambda \in U$, jest rezolwentą operatora domkniętego, wtedy i tylko wtedy gdy ma gęsty obraz i trywialne jądro.*

Warunek jest oczzywiści konieczny. Aby udowodnić jego dostateczność, ustalamy $\lambda = \lambda_0$ i definiujemy domknięty, gęsto określony operator A na obrazie $J(\lambda_0)$ wzorem

$$A = \lambda_0 I - J(\lambda_0)^{-1}.$$

Teraz wystarczy tylko sprawdzić, że dla pozostałych λ

$$J(\lambda)\Big(\lambda - A\Big)J(\lambda_0) = \Big(\lambda - A)J(\lambda)J(\lambda_0) = J(\lambda_0).$$

4. **Twierdzenie.** *Niech A_n będzie ciągiem generatorów mocno ciągłych półgrup kontrakcji. Jeśli dla pewnego $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$ zachodzi mocna zbieżność rezolwent*

$$R_n(\lambda_0)x \to J(\lambda_0)x, \qquad x \in X,$$

to zbieżność ta zachodzi dla każdego $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Jeśli ponado $J(\lambda_0)$ ma gęsty obraz, to operatory graniczne $J(\lambda)$ tworzą rezolwentę pewnego generatora mocno ciągłej półgrupy kontrakcji.

5. *Dowód:* Oznaczmy przez U zbiór tych λ, dla których zachodzi zbieżność $R_n(\lambda)x \to J(\lambda)x$. Jeśli $\lambda_1 \in U$, to ze wzoru

$$R_n(\lambda)x = \sum_{k=0}^{\infty} R_n(\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda)^n x, \qquad |\lambda - \lambda_1| \leqslant q < \operatorname{Re}\lambda_1 \leqslant \|R_n(\lambda_1)\|^{-1},$$

widać, że U jest otwarty. Z drugiej strony, wzór

$$\begin{aligned} R_n(\lambda) - R_n(\lambda_m) = (\lambda - \lambda_m)R_n(\lambda_1)\Big(R_n(\lambda_m) - J(\lambda_m)\Big) \\ + (\lambda - \lambda_m)R_n(\lambda_1)R_n(\lambda_m)J(\lambda_m) \end{aligned}$$

łącznie z oszacowaniami $\|R_n(\mu)\| \leqslant (\operatorname{Re}\mu)^{-1}$ pozwala wnioskować, że U jest zbiorem domkniętym. Zatem $U = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$.

Opertory graniczne $J(\lambda)$ tworzą oczywiście pseudorezolwentę. Mamy też

$$\|J(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Aby zakończyć dowód, trzeba jeszcze wiedzieć, że jądro pseudorezolwenty jest trywialne. W tym celu pokażemy, że dla każdego $x \in X$

$$mJ(m)x \to x, \qquad m \to \infty.$$

Rzeczywiście,

$$(m-1)J(m)J(1) = J(1) - J(m),$$

skąd

$$\|mJ(m)J(1)x - J(1)x\| \leqslant \|J(m)\|\,\|J(1) - I\|\,\|x\| \leqslant \frac{2\|x\|}{m}.$$

Stąd już wynika nasza teza.