2. Operatory nieograniczone na przestrzeni Banacha

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

1. Operatorem liniowym na X nazywamy odwzorowanie liniowe $A : D \to X$, gdzie D jest liniową podprzestrzenią X. Jeśli D jest gęsta, to mówimy, że A jest gęsto określony. Jeśli $D = X$ i $\sup_{x \neq 0} \|x\|^{-1}\|Ax\| < \infty$, to A nazywa się ograniczony.

2. Przykład: $f \to xf$ w przestrzeni $X = L^p(\boldsymbol{R})$. Tutaj $D = \{f \in L^p(\boldsymbol{R}) : xf \in L^p(\boldsymbol{R})\}$.

3. Przykład: $f \to f'$ w przestrzeni $X = C([0,1])$. Tutaj $D = C^1([0,1])$.

4. Mówimy, że operator $A : D \to X$ jest domknięty, jeśli jego wykres

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D\}$$

jest domkniętą podprzestrzenią liniową $X \times X$. Innymi słowy, operator A jest domknięty, jeśli dla każdego ciągu (x_n) elementów D zbieżności $x_n \to x$ i $Ax_n \to y$ pociągają $x \in D$ i $y = Ax$.

5. Jądro operatora domkniętego jest podprzestrzenią domkniętą. Natomiast obraz nie musi być domknięty, nawet gdy operator jest ograniczony. Wystarczy przytoczyć przykład operatora Volterry $Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ w przestrzeni $X = C([0,1])$.

6. Na mocy twierdzenia Banacha operator A jest ograniczony, wtedy i tylko wtedy gdy jest domknięty i $D = X$.

7. Operator $A : D \to X$ wyznacza normę $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$ na podprzestrzeni D. Operator A jest domknięty, wtedy i tylko wtedy gdy podprzestrzeń D z normą $\|\cdot\|_A$ jest zupełna.

8. Jeśli operator $A : D \to X$ jest domknięty i spełnia warunek $\|Ax\| \geqslant C\|x\|$ dla $x \in D$ (jest mocno injektywny), to ma obraz domknięty.

Dowód. Niech $x_n \in D$ i niech $y_n = Ax_n \to y \in X$. Mamy $\|x_n - x_m\| \leqslant C^{-1}\|y_n - y_m\|$, więc ciąg (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego, a zatem zbieżnym do pewnego $x \in X$. Z domkniętości operatora A wynika, że $x \in D$ i $y = Ax \in A(D)$. □

9. Jeśli $A : D \to X$ jest surjekcją, to odwzorowanie A jest otwarte (twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym). Jeśli ponadto $A \in 1-1$, to A^{-1} jest ograniczone (twierdzenie Banacha o wykresie domkniętym).

10. Operator $A : D \to X$ nazywa się domykalny, jeśli domknięcie jego wykresu jest wykresem pewnego operatora $\bar{A}$. Operator $\bar{A}$ nazywamy wtedy domknięciem A.

11. Operator $A : D \to X$ jest domykalny, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego ciągu (x_n) elementów D zbieżności $x_n \to 0$ i $Tx_n \to y$ pociągają $y = 0$.

12. Przykład: Niech $X = C([0,1])$, $D = C^1([0,1])$. Operator $A : D \to X$ określony wzorem $Af(x) = f'(0)$ (funkcja stała), ma jądro gęste, więc nie może być domykalny.

13. Suma operatorów domkniętych o wspólnej gęstej dziedzinie nie musi być operatorem domykalnym! Aby to zobaczyć, rozważmy następujący przykład. Niech $X = l^\infty$ i niech $D = l^1$. Na D definiujemy operator

$$Sx = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots).$$

Jeśli ciąg wektorów (x^N) dąży do x i Sx^N dąży do y, to oczywiście $y = Sx$, a więc S jest domknięty. Niech $\mathbf{m}$ będzie średnią Banacha na l^∞. Operator $Tx = \mathbf{m}(Sx)\delta_1 - Sx$ jest także domknięty. Natomiast operator $S + T : D \to X$ nie jest domykalny. Wystarczy zauważyć, że jeśli $x^N = N^{-1}\sum_{k=1}^N \delta_k$, to $x^N \to 0$, ale $(S+T)x^N = \delta_1$ nie dąży do zera.

14. Niech $A : D \to X$ będzie gęsto określony. Niech $D' = \{\xi \in X' : \xi \circ A \in X'\}$. Wtedy $A' : D' \to X'$ zadane wzorem $A'\xi = \xi \circ A$ nazywamy odwzorowaniem sprzężonym do A. W innym zapisie mamy

$$< x, A'\xi > = < Ax, \xi >, \qquad x \in D,\ \xi \in D'.$$

15. Operator A' jest zawsze domknięty! Natomiast nie zawsze jest gęsto określony. Rzeczywiście, jeśli A jest operatorem z Przykładu 12, to $D' = \{0\}$.