3. Operatory domknięte

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

1. Jeśli $A : D \to X$ jest gęsto określony, to
$$\Gamma(A') = \Gamma(A)^{\perp}, \qquad \overline{\Gamma(A)} = {}^{\perp}\Gamma(A'),$$
gdzie $\perp$ jest rozumiane względem niezdegenerowanej formy
$$< (x, y), (\xi, \eta) >= \xi(y) - \eta(x).$$

2. Niech $A : D \to X$ będzie gęsto określony. Operator A' jest *słabo gęsto określony, wtedy i tylko wtedy gdy A jest domykalny.

Dowód. Niech A' będzie *słabo gęsto określony. Jeśli $D \ni x_n \to 0$ i $Ax_n \to y$, to dla każdego $\xi \in D'$
$$< \xi, y >= \lim_n < \xi, Ax_n >= \lim_n < A'\xi, x_n >= 0,$$
bo $A'\xi$ jest funkcjonałem ciągłym. Skoro D' jest *słabo gęsta, $y = 0$, a więc A jest domykalny.

Niech teraz A będzie domykalny. Przypuśmy, że wektor x_0 ma tę własność, że $< \xi, x_0 >= 0$ dla $\xi \in D'$. Wtedy
$$(0, x_0) \in \Gamma(A')^{\perp} = \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(\bar{A})$$
na mocy (1) i domykalności A. To jednak pociąga $x_0 = 0$ i *-słabą gęstość D' w X'. $\square$

3. Niech X będzie refleksywna, a $A : D \to X$ gęsto określony. A jest domykalny, wtedy i tylko wtedy gdy A' jest gęsto określony. Jeśli tak jest, to $A'' = A$.

4. Niech A będzie gęsto określony i domykalny. A jest $1-1$, wtedy i tylko wtedy gdy A' ma obraz *-słabo gęsty. A ma obraz gęsty, wtedy i tylko wtedy gdy A' jest $1-1$.

5. Mówimy, że operator $A : D \to X$ jest odwracalny, jeśli A jest bijekcją i A^{-1} jest ograniczony.

6. Niech $A : D \to X$ będzie domknięty. Wówczas A jest odwracalny, wtedy i tylko wtedy gdy A' jest odwracalny. Wtedy też $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Dowód. Niech $B = A^{-1}$. Wtedy
$$B'A'\xi(x) = A'\xi(Bx) = \xi(ABx) = \xi(x), \qquad A'B'\xi(x) = B'\xi(Ax) = \xi(BAx) = \xi(x)$$
dla $x \in D$, $\xi \in D'$, co pokazuje, że B' jest ograniczonym operatorem odwrotnym do A'.

Niech teraz A' będzie odwracalny. Oznaczmy przez B' ograniczony operator odwrotny. Dla dowolnych $x \in D$, $\xi \in D'$,
$$| < x, \xi > | = | < Ax, B'\xi > | \leqslant \|(B')^{-1}\| \|Ax\| \|\xi\|,$$
czyli
$$\|Ax\| \geqslant \frac{\|x\|}{\|(B')^{-1}\|},$$
a stąd A jest mocno injektywny i domknięty, a więc ma obraz domknięty. Na mocy (4) obraz ten jest też gęsty. Zatem A jest bijekcją. Operator A^{-1} jest ograniczony na mocy twierdzenia o wykresie domkniętym. $\square$

7. Jako bezpośredni wniosek z poprzedniego punktu otrzymujemy, że dla domkniętego gęsto określonego operator A spektra operatorów A i A' są identyczne. Co więcej, jeśli $\lambda \in \sigma(A) = \sigma(A')$, to
$$(\lambda - A')^{-1} = \Big((\lambda - A)^{-1}\Big)'.$$