4. Definicja mocno ciągłej półgrupy kontrakcji i jej generatora infinitezymalnego

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

1. Jednoparametrowa rodzina $T_t \in \mathcal{B}(X)$ nazywa się *mocno ciągłą półgrupą kontrakcji*, jeśli

a) $T_{t+s} = T_t T_s$ dla $t, s \geqslant 0$,

b) $\lim_{t\to 0} \|T_t x - x\| = 0$ dla $x \in X$,

c) $\|T_t\| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$.

Z powyższych warunków łatwo wynika, że

d) $T_0 = I$,

e) $\lim_{t\to t_0} T_t x = T_{t_0} x$ dla $x \in X$.

2. Jeśli (T_t) jest mocno ciągłą półgrupą kontrakcji na X, to

$$D = \{x \in X : \lim_{t\to 0} t^{-1}(T_t x - x) \text{ istnieje}\}$$

przyjmujemy jako dziedzinę operatora

$$Ux = \lim_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t},$$

który będziemy nazywać *generatorem infinitezymalnym* półgrupy.

3. Jeśli $x \in D$, to funkcja $t \to T_t x$ jest różniczkowalna na $[0, \infty)$ i

$$\frac{d}{dt} T_t x = U T_t x = T_t U x.$$

4. Generator U jest gęsto określonym operatorem domkniętym.

Dowód. Najpierw zauważamy, że wektory postaci

$$x_\delta = \delta^{-1} \int_0^\delta T_s x \, ds, \ \ x \in X,$$

leżą gęsto w X, a następnie bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że $x_\delta \in D$ oraz

$$U x_\delta = \delta^{-1}(T_\delta x - x).$$

Zatem dziedzina generatora jest gęsta w X.

Jeśli natomiast $D \ni x_n \to x_0$ i $U x_n \to y_0$, to z tożsamości

$$T_t x_n = \int_0^t T_s U x_n \, ds$$

wnosimy, że

$$T_t x_0 = \int_0^t T_s y_0 \, ds,$$

skąd łatwo wynika, że $x_0 \in D$ i $U x_0 = y_0$. Zatem U jest domknięty. □

5. Jeśli $f : [0, \delta] \to \boldsymbol{C}$ jest funkcją ciągłą, to

$$U \int_0^\delta f(s) T_s x \, ds = \int_0^\delta f(s) U T_s x \, ds, \qquad x \in D.$$

Jeśli się wyrazi całkę przez sumy riemannowskie, to widać, że równość ta wynika z domkniętości operatora U.

6. Dla każdego $\alpha > 0$ operator

$$G_\alpha x = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t x \, dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-\alpha t} T_t x \, dt$$

jest operatorem rezolwenty U, czyli

$$(\alpha - U)G_\alpha = G_\alpha(\alpha - U) = I.$$

Co więcej, $\|G_\alpha\| \leqslant \alpha^{-1}$.

Dowód. Postępujemy jak w przypadku półgrupy ciągłej w normie, korzystając z domkniętości operatora U oraz z (5). Jeśli $x \in D$, to

$$\begin{aligned} G_\alpha U x &= \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-t\alpha} T_t U x \, dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-t\alpha} \frac{d}{dt} T_t x \, dt \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(e^{-t\alpha} T_t x \Big|_0^N + \alpha \int_0^N e^{-t\alpha} T_t x \, dt \right) = \alpha G_\alpha x - x, \end{aligned}$$

a więc $G_\alpha(\alpha I - U) = I_D$. Z drugiej strony, znów dla $x \in D$

$$G_\alpha x = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-t\alpha} T_t x \, dt = \lim_{N\to\infty} x_N$$

oraz

$$U x_N = \int_0^N e^{-t\alpha} T_t U x \, dt \to G_\alpha U x - x,$$

więc $G_\alpha x \in D$ i $U G_\alpha x = G_\alpha x - x$. Korzystając raz jeszcze z domkniętości U, wnioskujemy, że $(\alpha I - U)G_\alpha = I_X$. $\square$