5. Twierdzenie Hille-Yosidy

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

1. Twierdzenie. Niech $U : D \to X$ będzie gęsto określonym domkniętym operatorem liniowym. Jeśli $(0, \infty) \subset \rho(U)$ i dla każdego $\alpha > 0$

$$\|(\alpha I - U)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha},$$

to istnieje dokładnie jedna mocno ciągła półgrupa kontrakcji, której generatorem infinitezymalnym jest U.

2. Dowód: Definiujemy operatory $J_\alpha = \alpha(\alpha I - U)^{-1}$. Dla każdego $x \in X$

(0.1) $$J_\alpha x \to x, \qquad \text{gdy } \alpha \to \infty.$$

Z założenia $\|J_\alpha\| \leqslant 1$, więc wystarczy wykazać zbieżność dla $x \in D$. Dla takich x mamy

$$J_\alpha x - x = \alpha^{-1} J_\alpha U x,$$

skąd już wynika (0.1). Widzimy też, że operatory $U_\alpha = J_\alpha U$ (zwane *przybliżeniami Yosidy*) są ograniczone i

$$\|e^{tU_\alpha}\| = \|e^{-t\alpha} e^{\alpha J_\alpha}\| \leqslant e^{-t\alpha} e^{t\alpha\|J_\alpha\|} \leqslant 1,$$

więc dla każdego $\alpha > 0$ mamy ciągłą w normie półgrupę kontrakcji e^{tU_α}.

3. W drugim kroku pokażemy, że wzór

$$T_t x = \lim_{\alpha\to\infty} e^{tU_\alpha} x$$

definiuje mocno ciągłą półgrupę kontrakcji. Rzeczywiście, dla dowolnych $\alpha, \beta > 0$ i $x \in D$ mamy

$$e^{tU_\alpha} x - e^{tU_\beta} x = \int_0^t \frac{d}{ds} e^{(t-s)U_\alpha} e^{sU_\beta} x \, ds = \int_0^t e^{(t-s)U_\alpha} e^{sU_\beta} x \Big(U_\beta x - U_\alpha x \Big) \, ds,$$

a więc

$$\|e^{tU_\alpha} x - e^{tU_\beta} x\| \leqslant t\|U_\beta x - U_\alpha x\|, \qquad x \in D,$$

skąd łatwo wynika nasza teza.

4. Teraz zajmiemy się generatorem $U_0 : D_) \to X$ półgrupy T_t. Chcemy wykazać, że $U = U_0$. Jeśli $x \in D$, to ze wzoru

$$e^{tU_\alpha} x - x = \int_0^t e^{sU_\alpha} U_\alpha x \, ds$$

otrzymujemy przez przejście graniczne

$$T_t x - x = \int_0^t T_s U x \, ds,$$

skąd wynika, że $x \in D_0$ i $U_0 x = Ux$. Zatem $U \subset U_0$. Równość obu operatorów wynika z faktu, że oba mają $\alpha = 1$ w swoich rezolwentach.

Jednoznaczności półgrupy T_t dowodzimy tak, jak w przypadku półgrup ciągłych w normie.