6. Operatory dysypatywne

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

1. Lemat. Niech $A : D \to X$ będzie gęsto określonym operatorem domkniętym. Jeśli A jest odwracalny, a B ograniczony o normie $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, to $A + B$ jest odwracalny i

$$(A+B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^{-1}(BA^{-1})^n,$$

gdzie szereg jest zbieżny w normie.

2. Wniosek. Spektrum gęsto określonego operatora A jest zbiorem otwartym. Jeśli bowiem $\lambda_0 \in \sigma(A)$ i $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$, to to $\lambda \in \sigma(A)$. Wtedy też

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}^{n+1}.$$

3. Gęsto określony operator $A : D \to X$ nazywa się *dysypatywny*, jeśli dla każdego $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)x\| \geqslant \lambda \|x\|, \qquad x \in D.$$

Zauważmy, że każdy generator U mocno ciągłej półgrupy kontrakcji jest operatorem dysypatywnym.

4. Operator dysypatywny jest domykalny i jego domknięcie też jest operatorem dysypatywnym.

Rzeczywiście, niech $x_n \in D_A$ będzie ciągiem zbieżnym do zera i niech $Ax_n \to y$. Dla dowolnego $x \in D_A$ i dowolnego $t > 0$

$$\|t(x_n + t^{-1}x) - A(x_n + t^{-1}x)\| \geqslant t\|x_n + t^{-1}x\|,$$

skąd po przejściu z n, a potem z t do nieskończoności $\|x - y\| \geqslant \|x\|$ dla dowolnego $x \in D_A$, co przeczy gęstości dziedziny A, chyba że $y = 0$.

5. Twierdzenie. Niech A będzie operatorem dysypatywnym. Jeśli dla pewnego $\lambda_0 > 0$ obraz operatora $\lambda_0 I - A$ jest gęsty, to jest on gęsty dla każdego $\lambda > 0$ i domknięcie $\bar{A}$ spełnia założenia twierdzenia Hille-Yosidy. Wobec tego, $\bar{A}$ jest generatorem infinitezymalnym mocno ciągłej półgrupy kontrakcji na X.