7. Półgrupy miar

1. *Półgrupą miar* na $\boldsymbol{R}^d$ nazywamy rodzinę miar probabilistycznych $\{\mu_t\}_{t>0}$, taką że

$$\lim_{t\to 0} < \mu_t, f >= f(0), \qquad f \in C_0(\boldsymbol{R}^d).$$

2. Twierdzenie: Niech μ_t będzie półgrupą miar. Wtedy

$$< P, f >= \lim_{t\to 0} \frac{< \mu_t, f > -f(0)}{t}, \qquad f \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d),$$

wyznacza funkcjonał liniowy, taki że

$$| < P, f > | \leqslant C\|f\|_{C^2}, \qquad \|f\|_{C^2} = \max_{|\alpha|\leqslant 2} \sup_{x\in\boldsymbol{R}^d} |D^\alpha f(x)|.$$

3. Lemat: Niech X będzie przestrzenią unormowaną, a Y jej domkniętą poprzestrzenią kowymiaru 1. Jeśli D jest gęstą podprzestrzenią liniową X, to $D \cap Y$ jest gęsta w Y.

4. Dowód twierdzenia: Niech $X = C_0^2(\boldsymbol{R}^d) \oplus \boldsymbol{R}$ oznacza *rzeczywistą* przestrzeń funkcji klasy C^2 mających granicę w nieskończoności ze skończoną normą $\|\cdot\|_{C^2}$. Łatwo sprawdzamy, że

$$T_t f(x) = \mu_t \star f(x)$$

jest mocno ciągłą półgrupą kontrakcji na tej przestrzeni Banacha. Niech U będzie generatorem, a D jego dziedziną. Niech

$$< P, f >= U\tilde{f}(0), \qquad f \in D.$$

Jedynym problemem jest ciągłość P. Na mocy Lematu wystarczy to sprawdzić na podprzestrzeni

$$X_0 = \{f \in X : D^\alpha f(0) = 0,\ |\alpha| \leqslant 1\},$$

która ma skończony kowymiar. Istota sprawy leży w tym, że istnieje funkcja $h \in D \cap X_0$, taka że

$$h(x) > \min\{|x|^2, 1\}, \qquad x \neq 0,$$

co także wynika z Lematu, bo warunki definiujące h wyznaczają zbiór otwarty w X_0, a D jest gęstą podprzestrzenią X.

Niech więc $f \in X_0$. Wtedy $|f(x)| \leqslant \|f\|_{C^2} h(x)$, więc

$$\frac{| < \mu_t, f > -f(0)|}{t} \leqslant \frac{< \mu_t, |f| >}{t} \leqslant \|f\|_{C^2} \frac{< \mu_t, h >}{t},$$

gdzie prawa strona ma granicę przy $t \to 0$, bo $h \in D$. Zatem

$$| < P, f > | \leqslant \|f\|_{C_2} < P, h >,$$

co należało pokazać.

5. Uwaga: Funkcjonał P jest *dysypatywny*, co oznacza, że dla każdej rzeczywistej funkcji $f \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ przyjmującej w zerze maksymalną wartość

$$< P, f >\leqslant 0.$$

Dlatego w następnej kolejności przystąpimy do badania funkcjonałów dysypatywnych.