8. Uogólnione laplasjany

1. Przypomnijmy, że funkcjonał P na $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ nazywamy *uogólninym lpalasjanem* (UL), jeśli jest rzeczywisty i dla każdej rzeczywistej funkcji $f \in C_c^\infty(\boldsymbol{R})$ przyjmującej w zerze największą wartość

$$< P, f > \leqslant 0.$$

2. Przykłady:

a) $< P, f >= \sum_k c_k D_k f(0)$, gdzie $c_k \in \boldsymbol{R}$,

b) $P = \sum_{kj} c_{kj} D_k D_j f(0) x_k x_j$, gdzie macierz (c_{jk}) jest nieujemnie określona,

c) $< P, f >= -c_0 f(0) + \int f(x)\mu(dx)$, gdzie μ jest miarą i $\|\mu\| \leqslant c_0$,

d) $< P, f >= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{f(x)-f(0)}{|x|^{d+\alpha}} dx$, gdzie $0 < \alpha < 2$.

3. Zauważmy, że kombinacja liniowa UL z dodatnimi współczynnikami jest UL.

4. Miara Levy'ego: Niech P będzie UL. Wzór

$$< \mu, f >=< P, f >, \qquad f \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d \setminus \{0\}),$$

definiuje miarę na $\boldsymbol{R}^d \setminus \{0\}$, taką że $\mu(\boldsymbol{R}^d \setminus U) < \infty$ dla każdego otoczenia zera.

Dowód. Jeśli $f \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d \setminus \{0\})$ jest nieujemna, to $< P, f > \geqslant 0$, bo $-f$ przyjmuje w zerze największą wartość. Zatem μ jest funkcjonałem nieujemnym, a więc (twierdzenie Riesza) miarą.

Niech U będzie otoczeniem zera, a $\varphi \in C_c^\infty(U)$ funkcją nieujemną o największej wartości $\varphi(0) = 1$. dla dowolnej nieujemnej funkcji $f \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d \setminus \bar{U})$, niech

$$g(x) = \|f\|_\infty \varphi(x) + f(x), \qquad x \in \boldsymbol{R}^d.$$

Wtedy $< P, g > \leqslant 0$, więc

$$< \mu, f > \leqslant < P, -\varphi > \|f\|_\infty,$$

co pociąga naszą tezę. $\square$

Od tej pory P oznaczać będzie uogólniny laplasjan, a $\mu = \mu_P$ jego miarę Levy'ego.

5. Dla każdej nieujemnej funkcji $f \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ przyjmującej wartość 0 w zerze

$$< \mu, f > \leqslant < P, f > . \tag{0.1}$$

W szczególności,

$$\int_{|x|\leqslant 1} |x|^2 \mu(dx) < \infty.$$

Dowód. Niech $\varphi \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}_d, [0, 1])$ będzie funkcją równą 1 w otoczeniu 0. Wtedy

$$< \mu, (1-\varphi)f >=< P, f > - < P, \varphi f > \leqslant < P, f >$$

bo $< P, \varphi f > \geqslant 0$. Wobec dowolności φ otrzymujemy tezę. $\square$

6. Jeśli $f \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ i $D^\alpha f(0) = 0$ dla $|\alpha| \leqslant 2$, to

$$< P, f >= \int f(x)\mu(dx).$$

Dowód. Niech h będzie funkcją gładką, taką, że $h(x) = |x|^2$ dla $|x| \leqslant 1/2$, $h(x) = 1$ dla $|x| \geqslant 1$ i $h(x) \neq 0$ dla $x \neq 0$. Wtedy $f = hg$, gdzie $g \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ i $g(0) = 0$. Ponadto, hP jest funkcjonałem nieujemnym, a więc miarą. Nietrudno zauważyć, że $hP = h\mu + c\delta_0$, gdzie δ_0 jest miarą Diraca. Zatem

$$< P, f >=< P, hg >=< hP, g >= \int h(x)g(x)\mu(dx) = \int f(x)\mu(dx).$$

$\square$