9. Postać uogólnionego laplasjanu

Niech P bedzie UL, a μ jego miarą Levy'ego.

1. Jeśli $\varphi \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d, [0,1])$ jest równa 1 w otoczeniu zera, to φP jest też UL.

2. Przyjmijmy następujące oznaczenia dla wielomianów Taylora:

$$f_1(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{d} D_k f(0) x_k,$$

oraz

$$f_2(x) = f_1(x) + \frac{1}{2} \sum_{jk} D_j D_k f(0) x_j x_k.$$

3. Mówimy, że funkcjonał P na $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ ma nośnik zwarty, jeśli istnieje zbiór zwarty $S \subset \boldsymbol{R}^d$, taki że $< P, f >=0$ dla f o nośniku rozłącznym z S.

4. Niech P ma nośnik zwarty. Funkcjonał

$$< P_1, f >= \int \Big(f(x) - f_1(x)\Big)\mu(dx) \qquad f \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d),$$

jest UL.

Dowód. Jeśli $f \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ przyjmuje maksymalną wartość w zerze, to pochodne f znikają w tym punkcie, więc

$$< P_1, f >= \int (f(x) - f(0))\mu(dx) \leqslant 0.$$

□

5. Postać uogólnionego laplasjanu: Niech P będzie UL o nośniku zwartym. Wtedy $P = P_0 + P_1$, gdzie

$$< P_0, f >= c_0 f(0) + \sum_{k=1}^{d} c_k D_k f(0) + \sum_{j,k=1}^{d} c_{jk} D_j D_k f(0),$$

przy czym $c_0 \leqslant 0$, $c_k \in \boldsymbol{R}$, a macierz (c_{jk}) jest nieujemnie określona.

Dowód. Niech $\varphi \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ będzie równa 1 na otoczeniu nośnika P. Wtedy

$$\begin{aligned}
< P, f > &=< P, \varphi f >=< P, \varphi f_2 > + < P, \varphi(f - f_2) > \\
&=< P, \varphi f_2 > + \int \varphi(f - f_2) d\mu \\
&=< P, \varphi f_2 > + < P_1, f > + \int \varphi(f_1 - f_2) d\mu
\end{aligned}$$

i wobec tego

$$\begin{aligned}
< P_0, f > &=< P, \varphi f_2 > + \int \varphi(f_1 - f_2) d\mu \\
&=< P, \varphi > f(0) + \sum_k < P, x_k \varphi > D_k f(0) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leqslant 2} D^\alpha f(0) < P, x^\alpha \varphi > - \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| = 2} D^\alpha f(0) \int x^\alpha \varphi(x) \mu(dx).
\end{aligned}$$

Widzimy więc, że P_0 ma żądaną postać, jeśli

$$c_0 =< P, \varphi >, \qquad c_k =< P, x_k \varphi >, \qquad 2c_{jk} =< P, x_j x_k \varphi > - \int x_j x_k \varphi d\mu.$$

Pozostaje sprawdzić, że macierz (c_{jk}) jest nieujemnie określona. W tym celu zauważmy, że forma dwuliniowa

$$F(x, y) = \sum_{jk} c_{jk} x_j y_k,$$

jest symetryczna, więc po ortogonalnej zmianie bazy przyjmuje postać diagonalną z nowymi współczynnikami

$$2c_{kk} =< P, x_k^2\varphi > - \int x_k^2\varphi d\mu,$$

które są nieujemne. □

6. Dystrybucja: Wzorem

$$< P, f >=< P, \varphi f > + < \mu, (1-\varphi)f >$$

możemy rozszerzyć funkcjonał P na przestrzeń funkcji ograniczonych i gładkich. Zauważmy, że wtedy

$$| < P, f > | \leqslant C\Big(\max_{|\alpha|\leqslant 2} \sup_{|x|\leqslant 1} |D^\alpha f(x)| + \sup_{x\in \boldsymbol{R}^d} |f(x)|\Big).$$

Zatem P przedłuża się jeszcze na przestrzeń ograniczonych funkcji klasy C^2 i zachowuje przy tym własność UL:

$$< P, f >\leqslant 0, \qquad f \in C_b^2(\boldsymbol{R}^d),\ f \leqslant f(0).$$

W szczególności, można patrzeć na P jako na ciągły funkcjonał na przestrzeni Schwartza $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$, czyli *dystrybucję temperowaną*.