Zwartość w topologii zbieżności punktowej

Niech X będzie zwartą przestrzenią topologiczną. Będziemy rozważać następujące własności podzbiorów przestrzeni $C(X)$ z topologią Tichonowa zbieżności punktowej:

a) (warunkową) zwartość,

b) (warunkową) ciągową zwartość,

c) (warunkową) przeliczalną zwartość.

Ostrzeżenie. Punkt skupienia ciągu nie musi być granicą żadnego z jego podciągów. Rozważmy przestrzeń $C([0,1])$. Dla $t \in [0,1]^n$ niech

$$A_t = \{t_k : 1 \leqslant k \leqslant n\} \subset [0,1].$$

Jeśli $h \in C([0,1])$, niech

$$B_h = \{x \in [0,1] : |h(x)| > 1\}.$$

Nietrudno zauważyć, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ zbiory otwarte

$$U_h = \{t \in [0,1]^n : h(A_t) \subset (-1/n, 1/n)\}, \qquad |B_h| > 1 - 3^{-n},$$

tworzą otwarte pokrycie $[0,1]^n$, więc istnieje skończony zbiór $H_n \subset C([0,1])$, taki że

$$[0,1]^n \subset \bigcup_{h \in H_n} U_h$$

i $|B_h| > 1 - 3^{-n}$ dla każdego $h \in H_n$. Stąd już widać, że funkcja zerowa jest punktem skupienia przeliczalnego zbioru $H = \bigcup_n H_n$, ale żaden ciąg elementów H nie może być zbieżny punktowo do zera. Rzeczywiście, każdy taki ciąg zawiera podciąg (h_k) mający co najwyżej jeden wyraz w każdym ze skończonych zbiorów H_n. Wtedy

$$|\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{h_k}| > 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = 1/3,$$

więc $h_k(x) > 1$ dla wszystkich k na zbiorze niepustym (bo dodatniej miary) i nie może być zbieżny punktowo do zera.

Chcemy otrzymać następujące równoważności

$$\text{a)} \iff \text{b)} \iff \text{c)}.$$

Jako że implikacje a) $\implies$ c) oraz b) $\implies$ c) są natychmiastowe, obiecany wynik ujmiemy tak:

0.1. Twierdzenie. *Jeśli zbiór $H \subset C(X)$ jest warunkowo przeliczalnie zwarty, to jest także warunkowo zwarty i warunkowo ciągowo zwarty. Co więcej, każdy punkt domknięcia H jest granicą pewnego podciągu elementów H.*

Dowód. Niech $H \subset C(X)$ będzie warunkowo przeliczalnie zwarty. Dla każdego $x \in X$ zbiór $H(x) = \{h(x) : h \in H\}$ jest ograniczony, więc H jest zbiorem warunkowo zwartym w $\boldsymbol{C}^X$. Pokażmy, że domknięcie H w tej większej przestrzeni zawiera się nadal w $C(X)$. To oczywiście już pociąga naszą tezę.

Załóżmy nie wprost, że $g \in \overline{H} \setminus C(X)$. Istnieje wtedy punkt $x_0 \in X$, w którym g nie jest ciągła. Indukcyjnie konstruujemy ciąg punktów $x_k \in X$ i ciąg funkcji $f_n \in H$, w taki sposób że

$$|g(x_k) - g(x_0)| \geqslant \varepsilon, \qquad k \geqslant 1, \tag{0.2}$$

$$|f_n(x_k) - g(x_k)| < 1/n, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n, \tag{0.3}$$

$$|f_n(x_k) - f_n(x_0)| < 1/k, \qquad k > n \geqslant 1 \tag{0.4}$$

dla pewnego $\varepsilon > 0$. Niech h będzie punktem skupienia zbioru $\{f_n : n \geqslant 1\}$, a y punktem skupienia zbioru $\{x_k : k \geqslant 0\} \subset X$. Z (0.3) i (0.4) wynika

$$h(x_k) = g(x_k), \qquad f_n(y) = f_n(x_0), \qquad k \geqslant 0, n \geqslant 1. \tag{0.5}$$

Uwzględniając (0.2) i (0.5), mamy

$$\varepsilon \leqslant |g(x_k) - g(x_0)| \leqslant |h(x_k) - h(y)| + |h(y) - f_n(y)|$$
$$+ |f_n(x_0) - g(x_0)| < |h(x_k) - h(y)| + |h(y) - f_n(y)| + \frac{1}{n}$$

dla $n, k \in \boldsymbol{N}$. Aby otrzymać sprzeczność, wybieramy odpowiednie n i k.

Przechodzimy do drugiej części dowodu. Kolejno pokażemy, że

a) każdy element domknięcia H jest punktem skupienia pewnego ciągu elementów H,

b) każdy punkt skupienia ciągu elementów H jest granicą pewnego podciągu tego ciągu.

Rzeczywiście, niech g należy do domknięcia warunkowo przeliczalnie zwartego zbioru H w $C(X)$. Dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ i każdej funkcji $h \in H$ niech

$$U_h = \left\{ t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in X^n : |g(t_k) - h(t_k)| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Zbiory U_h są otwarte, a nasze założenie implikuje, że stanowią pokrycie zwartej przestrzeni X^n. Istnieje zatem skończona rodzina $H_n \subset H$, taka że każdy element $t \in X^n$ należy do któregoś ze zbiorów U_h dla $h \in H_n$. W takim razie dla każdego otoczenia bazowego g w $C(X)$ istnieje element h z przeliczalnego podzbioru $H_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \subset H$ leżący w tym otoczeniu. Po uporządkowaniu zbioru H_0 otrzymujemy żądany ciąg. W ten sposób udowodniliśmy tezę a).

Przechodzimy do dowodu tezy b). Niech (g_n) będzie ciągiem elementów H i niech g_0 będzie punktem skupienia tego ciągu. Wprowadźmy w X najsłabszą topologię, w której wszystkie funkcje g_k są ciągłe. Nie musi to być topologia Hausdorffa. Można ją jednak opisać przez półmetrykę

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|g_k(x) - g_k(y')|}{1 + |g_k(x) - g_k(y)|},$$

a następnie, dzieląc przez relację równoważności

$$x \approx y \iff d(x, y) = 0,$$

otrzymać przestrzeń metryczną X' będącą ciągłym obrazem X przez odwzorowanie ilorazowe. Jest więc X' zwarta i metryczna, a zatem i ośrodkowa.

Funkcje

$$g'_k(x') = g_k(x)$$

są ciągłe na X' i g'_0 jest punktem skupienia ciągu (g'_k). Co więcej, zbiór $G' = \{g'_k : k \geqslant 1\}$ jest warunkowo przeliczalnie zwarty, a więc na mocy Twierdzenia 0.1 warunkowo zwarty. Z twierdzenia Arzeli-Ascoliego wynika, że rodzina funkcji G' jest jednakowo ciągła, a więc zbieżność punktowa ciągu elementów G' na X' jest równoważna zbieżności na gęstym podzbiorze. Ale X' jest ośrodkowa, co pozwala wybrać metodą przekątniową zbieżny do g'_0 podciąg (g'_{k_j}) ciągu (g'_k). Nietrudno zauważyć, że podciąg (g_{k_j}) jest zbieżny punktowo do g_0. □

Jako wniosek otrzymujemy

0.6. Twierdzenie (Eberlein-Smulyan). *Dla podzbioru M przestrzeni Banacha E słaba zwartość, przeliczalna słaba zwartość i ciągowa słaba zwartość są własnościami równoważnymi.*

Dowód. Niech X będzie kulą jednostkową z topologią *słabą. Z twierdzenia Banacha-Alaoglu wiemy, że X jest przestrzenią zwartą. Przestrzeń E ze słabą topologią jest podprzestrzenią przestrzeni $(E')^\star$ wszystkich funkcjonałów liniowych na E' z topologią zbieżności punktowej. Ta ostatnia jest w naturalny sposób homeomorficzna z podprzestrzenią $\boldsymbol{C}^X$. Zatem

$$E \ni u \to f_u \in C(X) \subset \boldsymbol{C}^X, \qquad f_u(x) = < u, x >,$$

jest zanurzeniem homeomorficznym. Teza wynika więc z Twierdzenia 0.1. □