1. Teoria półgrup operatorów – zadania

1. Udowodnij nierówność

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\leqslant\frac{k(k-1)}{2n}$$

dla $n>2$ i $1<k<n$.

2. W przestrzeni Banacha X dany jest podwójnie indeksowany ciąg wektorów (x_{nk}), taki że

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\|x_{nk}\|<\infty.$$

Wykaż, że

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x_{nk}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x_{nk}$$

3. Niech $f:[a,b]\to X$ będzie ciągłym odwzorowaniem odcinka w przestrzeń Banacha X. Dla każdego podziału $\pi=\{t_j\}_{j=0}^{N}$ odcinka $[a,b]$ definiujemy sumę riemannowską

$$S(f\pi)=\sum_{j=0}^{N-1}(t_{j+1}-t_j)f(t_j)\in X.$$

Niech $\delta(\pi)=\max_{0\leqslant j\leqslant N-1}(t_{j+1}-t_j)$. Pokaż, że istnieje granica

$$\int_a^b f(t)\,dt:=\lim_{\delta(\pi)\to 0}S(f,\pi)$$

i ma własności całki. W szczególności,

$$\|\int_a^b f(t)\,dt\|\leqslant\int_a^b\|f(t)\|\,dt,\qquad A\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b Af(t)\,dt$$

dla każdego $A\in\mathcal{B}(X)$.

4. Znajdź macierz e^{tA}, jeśli

$$\text{a) } A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\qquad\text{b) } A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad\text{c) } A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},$$

Które z półgrup są ograniczone na a) $\boldsymbol{R}^2$, b) $\boldsymbol{C}^2$?

5. Niech F będzie odwzorowaniem określonym na otwartym podzbiorze U przestrzeni Banacha X i o wartościach w przestrzeni Banacha Y. Przez pochodną F w punkcie $a\in U$ rozumiemy $A=F'(a)\in\mathcal{B}(X)$ (ograniczone odwzorowanie liniowe), takie że

$$\|F(a+h)-F(a)-Ah\|=o(\|h\|),\qquad h\to 0.$$

Niech U będzie zbiorem odwracalnych i ograniczonych operatorów liniowych na przestrzeni Banacha X. Zauważ, że U jest otwartym podzbiorm $\mathcal{B}(X)$ i oblicz pochodną odwzorowania $F(A)=A^{-1}$ w punkcie $B\in\mathcal{B}(X)$.

6. Przypomnij dowód twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym w ujęciu Pytlika (Analiza funkcjonalna, str 89-90). Zauważ, że podana argumentacja zachowuje ważność, gdy operator ograniczony zastąpimy operatorem domkniętym.

7. Niech będzie dany domknięty operator $A:D\to X$. Niech T będzie ograniczony. Pokaż, że operatory $A+T$ oraz AT i TA są domknięte. Najpierw zdefiniuj starannie dziedziny tych operatorów.

8. Niech A będzie gęsto określonym domkniętym operatorem na przestrzeni Banacha X. Niech forma $<(x,y),(\xi,\eta)>=\xi(y)-\eta(x)$ zadaje dualność $X\times X$ i $X'\times X'$. Pokaż, że jeśli X jest refleksywna, to $\Gamma(A)=\Gamma(A')^{\perp}$.

9. Niech $\{e_n\}$ będzie bazą ON ośrodkowej przestrzeni Hilberta H,a $\{x_n\}$ jej gęstym podzbiorem. Niech D będzie przestrzenią skończonych kombinacji liniowych wektorów bazy. Niech $A(\sum_{k=1}^{n}a_ke_k)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$. Pokaż, że wykres A jest gęsty w H. Co można powiedzieć o A'?

10. Wykaż, że wykres operatora $Af=f'(0)\mathbf{1}$, gdzie $\mathbf{1}(t)=1$ dla $0\leqslant t\leqslant 1$, o gęstej dziedzinie $D=C^1([0,1])$ w $X=C([0,1])$ jest gęsty w $X\times X$.

(pg)