2. Teoria półgrup operatorów – zadania

1. Udowodnij, że operator $f \to if'$ jest samosprzężony na $L^2(\boldsymbol{R})$, jeśli za dziedzinę przyjąć

$$D = \{f \in AC(\boldsymbol{R}) \cap L^2(\boldsymbol{R}) : f' \in L^2(\boldsymbol{R})\}.$$

Wyjaśnij, na czym polega specyfika pojęcia operatora sprzężonego na przestrzeni Hilberta.

2. Niech T będzie gęsto określonym operatorem na przestrzeni Hilberta H. Niech $N(T)$ oznacza jego jądro, a $R(T)$ obraz. Pokaż, że $N(T^\star) = R(T)^\perp$, a jeśli T jest jeszcze domknięty, to $N(T) = R(T^\star)^\perp \cap D(T)$. Czy można to uogólnić na przestrzenie Banacha?

3. Dany jest operator gęsto określony domknięty T na przestrzeni Hilberta, taki że $T^\star T \subset TT^\star$, co oznacza, że $TT^\star$ jest przedłużeniem $T^\star T$. Czy stąd wynika, że $TT^\star \subset T^\star T$? (Patrz Rudin, Twierdzenie 13.13.)

4. Znajdź e^A, gdy A jest n-wymiarową klatką Jordana.

5. Niech

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

i niech τ będzie śladem A, a 2γ będzie wyróżnikiem wielomianu charakterystycznego A. Pokaż, że jeśli $\gamma \neq 0$, to

$$e^A = e^{\tau/2}\Big(\frac{\sinh\gamma}{\gamma}A + (\cosh\gamma - \frac{2\tau\sinh\gamma}{\gamma}I)\Big)$$

Co się zmieni, gdy $\gamma = 0$?