3. Teoria półgrup operatorów – zadania

1. Wykaż, że wzór $T_t f(x) = e^{tF(x)} f(x)$, gdzie $\operatorname{Re} F \leqslant 0$ jest funkcją lokalnie całkowalną, definiuje mocno ciągłą pólgrupę operatorów na $L^p(\boldsymbol{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$. Opisz dziedzinę generatora i generator U. Znajdź spektrum generatora.

2. Wykaż, że operatory $T_t f(x) = f(x+t)$ tworzą mocno ciągłą pólgrupę kontrakcji na $L^p(\boldsymbol{R})$ dla $1 \leqslant p < 1$, a także na $C_0(\boldsymbol{R})$.

3. Sprawdź, że pólgrupy $T_t f(x) = e^{2\pi i x} f(x)$ i $S_t f(x) = f(x+t)$ na $L^2(\boldsymbol{R})$ są unitarnie równoważne. Znajdź ich generatory.

4. Niech T_t będzie mocno ciągłą pólgrupą operatorów na przestrzeni Banacha X. Pokaż, że wektory postaci $x_\varphi = \int \varphi(t) T_t x \, dt$, gdzie $\varphi \in C_C^\infty(\boldsymbol{R})$, $x \in X$, leżą w dziedzinie generatora i tworzą zbiór gęsty w X.

5. Dana jest mocno ciągła półgrupa operatorów T_t na przestrzeni Banacha. Pokaż, że istnieją stałe $M > 0$ i $\omega \in \boldsymbol{R}$, takie że $\|T_t\| \leqslant M e^{\omega t}$. W tym celu zauważ najpierw, że dla pewnego $M > 0$ jest $\|T_t\| \leqslant M$, o ile $0 \leqslant t \leqslant 1$.