4. Teoria półgrup operatorów – zadania

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

1. Niech U będzie generatorem mocno ciągłej pólgrupy kontrakcji T_t, a U_α aproksymacjami Yosidy operatora U. Udowodnij, że dla każdego $\lambda > 0$ i każdego $x \in X$

$$\left(\lambda I - U_\alpha\right)^{-1} x \to \left(\lambda I - U\right)^{-1} x,$$

gdy $\alpha \to \infty$.

2. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że we wzorze

$$\left(I - \frac{U_\alpha}{n}\right)^{-n} x \to \left(I - \frac{U}{n}\right)^{-1} x,$$

zbieżność przy $\alpha \to \infty$ jest jednostajna względem n i wyprowadź stąd

$$\lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{tU}{n}\right)^{-n} x = T_t x, \qquad x \in X,\ t > 0.$$

3. Niech U będzie generatorem mocno ciągłej półgrupy kontrakcji T_t. Udowodnij, że dla każdego $m \geqslant 1$ i każdego $\lambda > 0$

$$(\lambda I - U)^{-m} x = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty t^{m-1} e^{-\lambda t} T_t x \, dt, \qquad x \in X.$$

4. Niech T_t będzie mocno ciągłą półgrupą operatorów na X. Sprawdź, że operator

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{T_h x - x}{h}, \qquad x \in D = \{z \in X : \lim_{h\to 0} \frac{T_h x - x}{h} \text{ istnieje}\},$$

jest gęsto określonym operatorem domkniętym. Podobnie jak w przypadku pólgrup kontrakcji będziemy go nazywać *generatorem infinitezymalnym* półgrupy.

5. Niech T_t bedzie mocno ciągłą półgrupą operatorów, taką że $\|T_t\| \leqslant M$ dla $t \geqslant 0$ i pewnego $M > 0$. Wykaż, że wzór

$$\|x\|' = \sup_{t>0} \|T_t x\|$$

definiuje nomę równoważną wyjściowej, względem której półgrupa staje się mocno ciągłą półgrupą kontrakcji.

6. Niech będzie dany gęsto określony domknięty operator $A : D \to X$, taki że $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Załóżmy, że dla każdego $\lambda > 0$ i każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\|\lambda^n (\lambda I - A)^{-n}\| \leqslant M.$$

Dla $\mu > 0$ i $x \in X$ niech

$$\|x\|' = \sup_{\mu>0} \sup_n \|\mu^n (\mu I - A)^n x\|.$$

Udowodnij, że $\|\cdot\|'$ jest normą równoważną normie wyjściowej, bo

$$\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant M\|x\|, \qquad x \in X.$$

Co więcej, w nowej normie operator A spełnia założenia twierdzenia Hille-Yosidy, a więc jest generatorem mocno ciągłej półgrupy kontrakcji.

7. Korzystając z poprzedniego zadania i twierdzenia Hille-Yosidy, udowodnij następujące uogólnienie tego twierdzenia: *Niech $A : D \to X$ bedzie gęsto określonym i domkniętym operatorem liniowym w X, którego zbiór rezolwenty zawiera $(0, \infty)$. Niech ponadto dla kazdego $\lambda > w$ i każdego $n \in \boldsymbol{N}$*

$$\|(\lambda - w)^n (\lambda I - A)^{-n}\| \leqslant M,$$

gdzie $M > 0$ i $w \in \boldsymbol{R}$. Wówczas A jest generatorem mocno ciągłej pólgrupy operatorów T_t spełniających oszacowanie $\|T_t\| \leqslant Me^{wt}$.