

5. Teoria półgrup operatorów – zadania

1. Znajdź warunki na współczynniki $c_k, c_{kj}, C \in \mathbf{R}$, aby funkcjonal

$$\langle P, f \rangle = c_0 f(0) + \sum_{k=1}^d c_k D_k f(0) + \sum_{kj} c_{kj} D_k D_j f(0) + C f(x_0)$$

był UL. Punkt $x_0 \in \mathbf{R}^d$ jest ustalony.

2. Sprawdź, że funkcjonal $\langle P, f \rangle = i f'(0)$ na $C_c^\infty(\mathbf{R})$ nie jest UL. W tym celu zauważ, że spektrum operatora $f \rightarrow \tilde{P} \star f$ na $L^2(\mathbf{R})$ jest równe \mathbf{R} .

3. Niech μ_t będzie półgrupą miar na \mathbf{R}^d . Udowodnij, że wzór

$$T_t f(x) = \int f(x-y) \mu_t(dy)$$

definiuje mocno ciągłą półgrupę kontrakcji na $L^p(\mathbf{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, oraz na przestrzeniach $C_0(\mathbf{R}^d)$ i $C_u(\mathbf{R}^d)$. Opisz dziedziny generatorów.

4. Opisz funkcjonal generujący półgrupy miar Gaussa o gęstościach

$$P - t(x) = t^{-d/2} e^{-\pi \frac{|x|^2}{t}}, \quad x \in \mathbf{R}^d, t > 0.$$

Opisz dziedzinę generatora tej półgrupy działającej przez splot na $L^2(\mathbf{R}^d)$.

5. Wykaż, że funkcjonal generujący symetrycznej półgrupy α -stabilnej na \mathbf{R} ma postać

$$\langle P, f \rangle = c \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{(f(x) - f(0)) dx}{|x|^{1+\alpha}}.$$

6. Ponumerujmy liczby wymierne: $\mathbf{Q} = \{q_n : n \in \mathbf{N}\}$. Niech

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n |x - q_n|^{1/2}}.$$

Pokaż, że $V \in L_{loc}^1(\mathbf{R})$, ale $\int_a^b V(x)^2 dx = \infty$ dla każdego $a < b$.

7. Niech V będzie jak w poprzednim zadaniu. Definiujemy operator na $L^2(\mathbf{R})$ wzorem

$$Af = f' + Vf, \quad \mathcal{D}_A = \{f \in L^2(\mathbf{R}) : f \in AC(\mathbf{R}) \text{ oraz } f' + Vf \in L^2(\mathbf{R})\}.$$

Zauważ, że dla każdego przedziału $[a, b] \subset \mathbf{R}$ i każdej niezerowej funkcji w gęstej klasie \mathcal{D}_A

$$\int_a^b |f'(x)|^2 dx = \infty.$$

8. Dana jest funkcja $f : [a, b]$ ciągła i różniczkowalna prawostronnie. Udowodnij, że jeśli prawostronna pochodna $g = D^+ f$ jest ciągła, to f jest różniczkowalna w sposób ciągły.