6. Teoria półgrup operatorów – zadania

1. Niech T będzie ciągłym funkcjonałem na $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$ o zwartym nośniku. Dla $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$ definiujemy

$$T \star f(x) =< \widetilde{T}, f_x >, \qquad f \star T(x) =< T, \widetilde{f}_{-x} >,$$

gdzie $< \widetilde{T}, f >=< T, \widetilde{f} >$, $\widetilde{f}(x) = f(-x)$, $f_x(y) = f(y+x)$. Zauważ, że jeśli $< T, f >= \int F(x)f(x)\,dx$, gdzie $F \in L^1(\boldsymbol{R}^d)$, to

$$F \star f(x) = \int F(y)f(x-y)\,dy.$$

Udowodnij, że jeśli $f, g \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$, to $T \star f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$, $T \star f = T \star F$, oraz

$$T \star (f \star g) = (T \star f) \star g.$$

2. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Dla wektora $x \in X$ niech

$$F(x) = \{\xi \in X' :, x, x' >= \|x\|^2 = \|\xi\|^2\}.$$

Zauważ, że $F(x) \neq \emptyset$. Udowodnij, że operator $A : D \to X$ jest dysypatywny, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $x \in D \subset X$ istnieje $\xi \in F(x)$, taki że $\operatorname{Re} < Ax, \xi > \leqslant 0$. (Pazy, Theorem 4.2).

3. Niech P będzie symetrycznym UL na $\boldsymbol{R}^d$, takim że $< P, f \circ \delta_t >= t^\alpha < P, f >$ dla $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$. Udowodnij, że $P \star \mu_1$ wyznacza ograniczony operator splotu na $L^2(\boldsymbol{R}^d)$.