1. Szeregi potęgowe, funkcja wykładnicza i logarytm

Niech będzie dana liczba $a \in \mathbf{C}$.

1. *Ciąg a^n jest zbieżny tylko wówczas, gdy $|a| < 1$ albo $a = 1$.*

Dowód.

(i) Jeśli $|a| < 1$, to $|a^n| = |a|^n \to 0$. Czyli $a^n \to 0$.
(ii) Jeśli $|a| > 1$, to $|a^n| = |a|^n \to \infty$. Czyli $a^n \to \infty$.
(iii) Jeśli $|a| = 1$ i $a = 1$, to $a^n = 1 \to 1$.
(iv) Jeśli $|a| = 1$ i $a \neq 1$, to $|a^{n+1} - a^n| = |a^n(a-1)| = |a^n||a-1| = |a|^n|a-1| = |a-1| > 0$, więc a^n zbieżny być nie może.

$\square$

2. *Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|a| < 1$.*

Dowód. Jeśli $a \neq 1$, to

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1-a} \to \frac{1}{1-a},$$

jeśli $|a| < 1$. Jeśli $|a| \geqslant 1$ i $a \neq 1$ to powyższa suma jest rozbieżna. Wreszcie, jeśli $a = 1$, to

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = N + 1 \to \infty.$$

$\square$

Przykład. Rozpatrzmy $a = \frac{i}{2}$. Mamy

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{1 - (\frac{i}{2})^{N+1}}{1 - \frac{i}{2}} \to \frac{1}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{1 + \frac{i}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{4+2i}{5}.$$

Szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ , \qquad a_n \in \mathbf{C}.$$

Promień zbieżności szeregu potęgowego to

$$r = \sup\{x \geqslant 0 \colon \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n < \infty\}.$$

Promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest, jak widać, równy promieniowi zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$.

3. *Jeśli $|z| < r$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny bezwzględnie. Jeśli natomiast $|z| > r$, to ciąg $|a_n||z|^n$ jest nieograniczony, zatem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest rozbieżny.*

Dowód. Pierwsza część wynika z definicji promienia zbieżności. Jeśli $|z| > r$ i istnieje takie $A < \infty$, że $|a_n||z|^n \leqslant A$, to dla $q \in (r, |z|)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| q^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \left(\frac{q}{|z|}\right)^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} A \left(\frac{q}{|z|}\right)^n = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q}{|z|}\right)^n < \infty,$$

co daje sprzeczność z określeniem promienia. □

Często promień zbieżności szeregu potęgowego możemy obliczyć, korzystając z poniższych zależności:

(1) Jeśli $\sqrt[n]{|a_n|} \to \alpha$, to $r = \frac{1}{\alpha}$.
(2) Jeśli $a_n \neq 0$ oraz $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to \alpha$, to $\sqrt[n]{|a_n|} \to \alpha$.

Pamiętajmy jednak, że granice te mogą nie istnieć.

Przykład. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ma $a_n = 1$. Tak więc $\sqrt[n]{|a_n|} = 1 \to 1$ i $r = 1$. Szereg ten jest zbieżny dla $z \in K(0,1)$ i rozbieżny dla $z \in \mathbf{C} \setminus K(0,1)$.

Przykład. Dla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ jest $a_n = \frac{1}{n^2}$. Zatem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1,$$

czyli $r = 1$. Szereg jest zbieżny dla $|z| < 1$ oraz rozbieżny dla $|z| > 1$. Dla $|z| = 1$ zachodzi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

tak więc w tym przypadku szereg jest zbieżny.

Twierdzenie 4. *Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ będzie szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $r > 0$. Wtedy funkcja*

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < r,$$

jest ciągła.

Definiujemy $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Oznacza to, że promień zbieżności r jest nieskończony, a zatem funkcja jest określona na całej płaszczyźnie $z \in \mathbf{C}$. Funkcja $\exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ posiada następujące własności:

(1) jest ciągła;
(2) $e^{u+v} = e^u e^v$, $\quad u, v \in \mathbf{C}$;
(3) $e^0 = 1$;
(4) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$;
(5) $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $\quad x, y \in \mathbf{R}$;
(6) jest okresowa ze zbiorem okresów postaci $\{2k\pi\}_{k \in Z}$.

Dowód. (1). Ciągłość wynika wprost z twierdzenia o ciągłości szeregu potęgowego.

(2).Ta własność jest najważniejsza, bo z niej wynika wiele pozostałych. Jej dowód jednak pominiemy.

(3). $e^0 = 1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \ldots = 1$

(4). $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$

(5). Zauważmy, że

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

Stąd

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

(6). Rozważmy $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, takie że $e^{z_1} = e^{z_2}$. Wówczas $e^{x_1}e^{iy_1} = e^{x_2}e^{iy_2}$, czyli

$$e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2).$$

Wynika stąd oczywiście, że $x_1 = x_2$ oraz $\cos y_1 + i \sin y_1 = \cos y_2 + i \sin y_2$, a więc

$$\begin{cases} \cos y_1 = \cos y_2 \\ \sin y_1 = \sin y_2 \end{cases}$$

Otrzymujemy $y_1 = y_2 + 2k\pi$, czyli $e^{x_1+iy_1} = e^{x_1+i(y_1+2k\pi)}$. Zatem

$$z_1 = z_2 + 2k\pi i.$$

□

Wniosek 5. *Dla każdego $z \in C$ zachodzi $e^z \neq 0$.*

Dowód. $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x|e^{iy}| = e^x > 0$ □

Uwaga.

(1) Niech $z \neq 0$. Wtedy

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = e^{\ln r}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{\ln r}e^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi}.$$

(2) $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Definiujemy funkcje trygonometryczne argumentu zespolonego:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Mamy

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

skąd otrzymujemy

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}.$$

Dla $z = iy$ mamy $\sin iy = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}$. Tak więc

$$\lim_{y \to \infty} \sin iy \to -\infty, \qquad \lim_{y \to -\infty} \sin iy \to \infty.$$

Widać więc, że na osi urojonej *sinus* jest funkcją nieograniczoną. Podobnie rzecz ma się z *cosinusem*.

Zauważmy też, iż zachodzi zależność

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(-e^{2iy} - e^{-2iy} + 2 + e^{2iy} + e^{-2iy} + 2\right) = 1.\end{aligned}$$

Lemat 6. *Dla każdego $\theta \in (0, 2\pi)$*

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \sin n\theta\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \qquad \textit{oraz} \qquad \left|\sum_{n=0}^{N} \cos n\theta\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \cos n\theta + i\sum_{n=0}^{N} \sin n\theta &= \sum_{n=0}^{N} \cos n\theta + i\sin n\theta = \sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} = \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\frac{N+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{-i\frac{N+1}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\frac{N}{2}\theta} \frac{e^{-i\frac{N+1}{2}\theta} - e^{i\frac{N+1}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\frac{N}{2}\theta} \frac{\sin\frac{N+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \left(\cos\frac{N}{2}\theta \sin\frac{N+1}{2}\theta + i\sin\frac{N}{2}\theta \sin\frac{N+1}{2}\theta\right) \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

Tak więc

$$\left|\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \cos n\theta + i\sin n\theta\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

i tym samym

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \sin n\theta\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \qquad \text{oraz} \qquad \left|\sum_{n=0}^{N} \cos n\theta\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

□

Przypomnijmy

Kryterium 7 (Dirichleta). *Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny, o ile $b_n \searrow 0$ i sumy częściowe $\sum_{n=0}^{N} a_n$ są wspólnie ograniczone.*

Przykład. Pokażemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n}$$

ma promień zbieżności $r = 1$ i jest zbieżny we wszystkich punktach okręgu $|z| = 1$ z wyjątkiem i oraz $-i$.

Zbadajmy najpierw szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, dla którego $a_n = \frac{1}{n}$. Mamy

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \to 1,$$

czyli $r = 1$ i szereg jest zbieżny, jeśli $|z| < 1$. Rozważmy z, takie że $|z| = 1$. Możemy je zapisać jako $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, gdzie $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{i\theta})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}.$$

Na mocy kryterium Dirichleta szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ jest zbieżny dla każdego θ z przedziału $[0, 2\pi)$, bo $\frac{1}{n} \searrow 0$ oraz

$$\sum_{n=1}^{N} \sin n\theta = 0 \text{ dla } \theta = 0 \text{ i } \left|\sum_{n=1}^{N} \sin n\theta\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ dla } 0 < \theta < 2\pi.$$

Kryterium Dirichleta zapewnia również zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$ dla $\theta \in (0, 2\pi)$, ponieważ dla takich θ zachodzi

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos n\theta\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Dla $\theta = 0$ jest $\sum_{n=1}^{N} \cos n\theta = \sum_{n=1}^{N} 1 = N \to \infty$, więc szereg jest rozbieżny. Stąd szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| \leqslant 1$ i $z \neq 1$.

Niech

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Zatem

$$S(-z^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n}$$

i szereg ten jest zbieżny dokładnie, kiedy $|-z^2| \leqslant 1$ oraz $-z^2 \neq 1$, tj. wtedy gdy $|z| \leqslant 1$ i $z \notin \{-i, i\}$.

Przykład. Typowym przykładem na zastosowanie kryterium Leibniza zbieżności szeregu jest $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$. Ponieważ $\cos n\pi = (-1)^n$, mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n\ , \quad b_n \searrow 0.$$

Przechodzimy do definiowania *argumentu* i *logarytmu* liczby zespolonej. Niech $\alpha \in \mathbf{R}$. Niech

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \{z = x + iy \colon \alpha < y < \alpha + 2\pi\}, \\ L_\alpha &= \{re^{i\alpha} \colon r \geqslant 0\}, \qquad \Omega_\alpha = \mathbf{C} \setminus L_\alpha. \end{aligned}$$

Dla $z \in \Omega_\alpha$ określamy $\arg_\alpha z$ jako argument z z przedziału $(\alpha, \alpha + 2\pi)$.

8. *Dla* $z = re^{i\varphi} \in \Omega_\alpha$

$$\arg_\alpha z = \arg_\alpha re^{i\varphi} = \alpha + \mathbf{m}\left(\frac{\varphi - \alpha}{2\pi}\right) 2\pi,$$

gdzie $\mathbf{m}(x)$ *oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej* x.

Dowód. Niech $z = re^{i\varphi} \in \Omega_\alpha$. Dla pewnego $\varphi_0 \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$ możemy napisać

$$z = re^{i\varphi} = re^{i\varphi_0},$$

to znaczy $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$. Stąd

$$\frac{\varphi - \alpha}{2\pi} = k + -\frac{\varphi_0 - \alpha}{2\pi}.$$

Jako że $k \in Z$ i $\frac{\varphi_0 - \alpha}{2\pi} \in [0, 1)$,

$$\frac{\varphi_0 - \alpha}{2\pi} = m\left(\frac{\varphi - \alpha}{2\pi}\right),$$

w związku z czym $\varphi_0 = \alpha + \mathbf{m}\left(\frac{\varphi - \alpha}{2\pi}\right) 2\pi$ i

$$\arg_\alpha z = \arg_\alpha re^{i\varphi} = \alpha + \mathbf{m}\left(\frac{\varphi - \alpha}{2\pi}\right) 2\pi.$$

$\square$

Definiujemy $\log_\alpha \colon \Omega_\alpha \to P_\alpha$ wzorem

$$\log_\alpha z = \ln|z| + i \arg_\alpha z.$$

Jak widać *logarytm* jest funkcją ciągłą.

9. *Dla ustalonego* $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\exp\colon P_\alpha \xrightarrow[na]{1-1} \Omega_\alpha, \quad \text{oraz} \quad \log_\alpha \colon \Omega_\alpha \xrightarrow[na]{1-1} P_\alpha$$

są funkcjami wzajemnie odwrotnymi.

Dowód. Rzeczywiście, jeśli $z = re^{i\varphi} \in \Omega_\alpha$, możemy przyjąć, że $\varphi \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$. Wtedy

$$\exp(\log_\alpha z) = e^{\log_\alpha re^{i\varphi}} = e^{\ln r} e^{i\varphi} = re^{i\varphi} = z,$$

tak jak chcieliśmy.

Z drugiej strony, jeśli $z = x + iy \in P_\alpha$, to

$$\log_\alpha(\exp z) = \log_\alpha e^{x+iy} = \log_\alpha e^x e^{iy} = \ln e^x + iy = x + iy = z,$$

więc wszystko się zgadza. $\square$