2. **Całkowanie funkcji zespolonych**

Niech $f = u + iv\colon [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$. Całkę z ciągłej funkcji zespolonej f definiujemy jako

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta u(t)dt + i\int_\alpha^\beta v(t)dt.$$

Niech $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbf{R}$, $f, g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Całka w sensie zespolonym posiada podobne własności jak całka w sensie rzeczywistym:

(1) $\int_\alpha^\beta (f+g)(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_\alpha^\beta g(t)dt$;

(2) $\int_\alpha^\beta \lambda f(t)dt = \lambda \int_\alpha^\beta f(t)dt$ dla $\lambda \in \mathbf{C}$;

(3) $\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(t)|dt$.

Dowód. Niech $f = u + iv$, $\lambda = x + iy$. Wtedy

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \lambda f(t)dt &= \int_\alpha^\beta (xu(t) - yv(t))dt + i\int_\alpha^\beta (yu(t) + xv(t))dt \\ &= x\int_\alpha^\beta u(t)dt - u\int_\alpha^\beta v(t)dt + i\left(y\int_\alpha^\beta u(t)dt + x\int_\alpha^\beta v(t)dt\right) \\ &= (x+iy)\left(\int_\alpha^\beta u(t)dt + i\int_\alpha^\beta v(t)dt\right) = \lambda\int_\alpha^\beta f(t)dt,\end{aligned}$$

co dowodzi (2).

Dla każdej liczby zespolonej z istnieje liczba $e^{i\theta}$ o module 1, taka że $|z| = e^{i\theta}z$. Dobierając odpowiednio θ, mamy więc

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| &= e^{i\theta}\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta e^{i\theta}f(t)\,dt \\ &\leqslant \int_\alpha^\beta \Re\{e^{i\theta}f(t)\}\,dt \leqslant \int_\alpha^\beta |\Re\{e^{i\theta}f(t)\}|\,dt \\ &\leqslant \int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt,\end{aligned}$$

co daje (3). Łatwe sprawdzenie (1) pomijamy. □

Przykład.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta e^{it}dt &= \int_\alpha^\beta \cos t dt + i\int_\alpha^\beta \sin t dt \\ &= \sin t\Big|_\alpha^\beta - i\cos t\Big|_\alpha^\beta = \sin\beta - i\cos\beta - (\sin\alpha - i\cos\alpha) \\ &= -i(\cos\beta + i\sin\beta) - (-i)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{1}{i}\left(e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right).\end{aligned}$$

Przykład. Niech $F = u + iv\colon [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ będzie klasy C^1. Wtedy

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta F'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta u'(t)dt + i\int_\alpha^\beta v'(t)dt\\ &= u(\beta) - u(\alpha) + i(v(\beta) - v(\alpha))\\ &= F(\beta) - F(\alpha).\end{aligned}$$

Przykład. Pokażemy, że

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin lt dt = \begin{cases} 0 & , k \neq l,\\ \pi & , k = l.\end{cases}$$

Z faktu, że $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin kt \sin lt dt &= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right)\left(e^{ilt} - e^{-ilt}\right) dt\\ &= -\frac{1}{4}\left(\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{ilt}dt - \int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ilt}dt - \int_0^{2\pi} e^{-ikt}e^{ilt}dt + \int_0^{2\pi} e^{-ikt}e^{-ilt}dt\right).\end{aligned}$$

Tak więc dla $k \neq l$ mamy

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin lt dt = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} e^{i(k+l)t}dt + \int_0^{2\pi} e^{-i(k+l)t}dt = -\frac{1}{4}\cdot 2\int_0^{2\pi} \cos(k+l)tdt = 0.$$

Natomiast dla $k = l$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin lt dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 kt dt = \frac{1}{4}\cdot 2 \cdot 2\pi = \pi.$$

Funkcję $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \Omega \subseteq \mathbf{C}$ klasy C^1, gdzie Ω jest zbiorem otwartym, nazywamy *krzywą* klasy C^1. Będziemy przyjmować oznaczenie

$$\gamma^* = \gamma\left([\alpha, \beta]\right).$$

Przez całkę po krzywej $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ klasy C^1 z funkcji $f \in C(\gamma^*)$ rozumiemy

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Taką całkę nazywamy *całką zorientowaną* lub *skierowaną*.

Przykład. Niech $\gamma\colon [0, 1] \to [a, b] \subseteq \mathbf{C}$, $\gamma(t) = a + t(b - a)$, będzie parametryzacją odcinka. Wtedy

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(a + t(b - a))(b - a)dt.$$

Jeśli teraz przyjmiemy $a = i$, $b = 1$ i $f(z) = z^2$, dostaniemy

$$\begin{aligned}\int_{[i,1]} z^2dz &= \int_0^1 [i + t(1 - i)]^2(1 - i)dt = (1 - i)\int_0^1 [-1 + 2(1 - i)it + (1 - i)^2t^2]dt\\ &= (1 - i)\left[-1 + (1 + i) + (1 - i)^2\frac{1}{3}\right] = i - 1 + 2 + \frac{1}{3}(1 - i)^3\\ &= i + 1 + \frac{1}{3}(1 - 3 - 3i + i) = \frac{1}{3}(1 + i).\end{aligned}$$

Podobnie
$$\int_{[1,i]} z^2 dz = -\frac{1}{3}(1+i).$$

Całka po krzywej posiada znane własności:

(1) $\int_\gamma (f(z)+g(z))\,dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$;

(2) $\int_\gamma \lambda f(z)dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz$;

(3) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant ML(\gamma)$, gdzie $M = \sup|f(z)|$, a $L(\gamma)$ jest długością krzywej.

Zauważmy bowiem, że
$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leqslant M\int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt = ML(\gamma).$$

Skończoną rodzinę krzywych $\mathcal{C} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ klasy C^1 będziemy nazywać *łańcuchem*. Przez całkę po łańcuchu $\mathcal{C}$ będziemy rozumieli sumę
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_k} f(z)\,dz.$$

Będziemy też czasem pisać
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1+\dots+\gamma_N} f(z)\,dz.$$

Łańcuch $\mathcal{C}$, w którym początek krzywej γ_{k+1} pokrywa się z końcem krzywej γ_k będziemy nazywali *drogą*. Na drogę można też patrzeć, jak na krzywą $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ kawałkami klasy C^1. Najczęściej „uczęszczanymi" przez nas drogami będą łamane, okręgi, łuki okręgów i inne drogi składające się fragmentami z wymienionych. Oczywiście drogi można też w oczywisty sposób składać, otrzymując w ten sposób nową dłuższą drogę.