3. Spójność i jednospójność

Niech $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbf{C}$. Przez

$$[z_1, z_2, \dots, z_n]$$

oznaczać będziemy *łamaną* o wierzchołkach z_k. Łamana nazywa się *zamknięta*, jeśli $z_n = z_1$. Łamana nazywa się *zwyczajna*, jeśli nie ma samoprzecięć. W szczególności łamana o dwóch wierzchołkach jest odcinkiem

$$[a, b] = \{a + t(b - a) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbf{C}$ nazywa się *spójny*, jeśli dla każdych $a, b \in \Omega$ istnieją punkty $z_1, z_2, \dots, z_n$, takie że

$$[z_1, z_2, \dots, z_n] \subset \Omega, \qquad z_1 = a, \; z_n = b.$$

Innymi słowy, spójność zbioru otwartego oznacza, że każde dwa punkty mozna połączyć łamaną zawartą w tym zbiorze.

Przykład. Koło

$$K(a, r) = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| < r\}$$

jest zbiorem spójnym, natomiast zbiór

$$V = \{z = x + iy : xy > 0\}$$

nie jest zbiorem spójnym. Podobnie zbiór otwarty

$$U = \{z \in \mathbf{C} : |\Re z| > 1\}$$

nie jest spójny.

Twierdzenie 1 (Jordan). *Niech Γ będzie łamaną zwyczajną zamkniętą. Istnieją wówczas rozłączne zbiory otwarte i spójne Ω_0 i Ω_1, takie że*

$$\mathbf{C} \setminus \Gamma = \Omega_0 \cup \Omega_1,$$

gdzie Ω_0 jest ograniczony oraz

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega_1 = \Gamma.$$

Tytułem komentarza dodajmy, że $\bar{\Omega_0} = \Omega_0 \cup \Gamma$ jest wielokątem ograniczonym przez Γ, a zbiór Ω_1 musi być nieograniczony.

Zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbf{C}$ nazywamy *jednospójnym*, jeśli dla dowolnej łamanej zamkniętej zwyczajnej Γ zawartej w Ω cały wielokąt ograniczony przez Γ zawiera się w Ω.

Przykład. Koło bez punktu

$$\Omega = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - a| < r\}, \qquad a \in \mathbf{C}, \quad r > 0,$$

nie jest zbiorem jednospójnym. Natomiast zbiór V z poprzedniego Przykładu jest jednospójny. Zbiorem niejednospójnym jest też pierścień

$$U = \{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < 2\}.$$

Intuicyjnie rzecz biorąc, zbiór jednospójny to zbiór bez „dziur". Można też posłużyć się następującym obrazowym modelem. W każdą „dziurę" lub „wysepkę" reprezentującą punkty spoza zbioru wbijamy chorągiewkę jak na polu golfowym, a następnie rzucamy w nasz zbiór pętlę lassa. Jeśli do punktu zbioru, w którym stoimy można całkowicie ściągnąć pętlę, to mówimy, że krzywa zakreślona przez pętlę jest ściągalna do punktu. Jasne jest, że każdą krzywą w zbiorze można ściągnąć do punktu wtedy i tylko wtedy, gdy na przeszkodzie nie stoi żadna chorągiewka. Tego właśnie wymagamy od zbioru jednospójnego.

Zbiór $U \subset \mathbf{C}$ nazywamy *gwiaździstym*, jeśli istnieje punkt $a \in U$, taki że dla każdego $z \in U$ odcinek $[z, a]$ zawiera się w U. Oczywiście zbiór gwiaździsty jest spójny. Dobrym przykładem zbioru gwiaździstego jest płaszczyzna bez półprostej

$$U = \mathbf{C} \setminus \{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) : r \geqslant 0\}$$

gdzie φ jest ustalonym kątem. Jako punkt a można wybrać którykolwiek z pozostałych punktów tej prostej:

$$a = -r(\cos\varphi + i\cos\varphi),$$

gdzie $r > 0$.

Twierdzenie 2. *Każdy otwarty podzbiór gwiaździsty płaszczyzny jest jednospójny.*

Dowód. Niech $a \in U$ będzie punktem, z którym można połączyć odcinkiem każdy punkt $z \in U$. Niech $\Gamma \subset U$ będzie łamaną zwyczajną zamkniętą. Oznaczmy przez W wielokąt otwarty ograniczony przez Γ. Chcemy pokazać, że $W \subset U$.

Niech $a \neq z \in W$. Rozważmy prostą P wyznaczoną przez a i z. Prosta ta przecina Γ co najmniej w dwóch punktach z_1, z_2 leżących po przeciwnych stronach punktu z. Niech to będą punkty najbliższe punktowi z. Punkty leżą na prostej w jednej z trzech możliwych kolejności: a) z_1, z_2, a i wtedy $z \in [z_1, a] \subset U$, b) a, z_1, z_2 i wtedy $z \in [z_2, a] \subset U$, c) z_1, a, z_2 i wtedy $z \in [z_1, z_2] \subset U$. $\square$