4. Równania Cauchy'ego–Riemanna

Niech $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ będzie zbiorem otwartym i niech $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$. Mówimy, że f ma w punkcie $a \in \Omega$ pochodną w sensie zespolonym (jest *holomorficzna* w a) równą $c \in \mathbf{C}$, jeśli

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = c.$$

Piszemy wtedy

$$c = f'(a) = \frac{df(z)}{dz}\Big|_{z=a}.$$

Zauważmy, że warunkiem równoważnym istnieniu pochodnej jest istnienie liczby $c \in \mathbf{C}$, takiej że

$$r(z) = \frac{f(z) - f(a) - c(z-a)}{z - a} \to 0, \qquad z \to a.$$

Stąd natychmiast wynika, że funkcja holomorficzna w punkcie a jest w tym punkcie ciągła, bo spełnia

$$f(z) - f(a) = (r(z) + c)\,(z - a).$$

Przykład. Niech $f(z) = z$, $z \in \mathbf{C}$. Wtedy

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{z - a}{z - a} = 1 \xrightarrow{z \to a} 1,$$

czyli $f'(z) = 1$.

Przykład. Niech $g(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbf{C}$. Wówczas

$$\frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \frac{\overline{z} - \overline{a}}{z - a} = \frac{\overline{z - a}}{z - a},$$

więc

$$\lim_{z \to a} \frac{\overline{z - a}}{z - a} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}.$$

Weźmy dwa ciągi zbieżne do 0

$$h_n = \frac{1}{n} \to 0\ , \qquad k_n = \frac{i}{n} \to 0.$$

Mamy

$$\frac{\overline{h_n}}{h_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \xrightarrow{n \to \infty} 1\ , \qquad \frac{\overline{k_n}}{k_n} = \frac{-\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}} = -1 \xrightarrow{n \to \infty} -1,$$

a więc funkcja $g(z) = \overline{z}$ nie jest holomorficzna w żadnym punkcie $a \in \mathbf{C}$.

Przykład. Dla $z \in \mathbf{C}$ jest $z = x + iy$, gdzie $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Zapiszmy funkcję z poprzedniego przykładu we współrzędnych rzeczywistych

$$g(x, y) = (x, -y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))\,.$$

Oczywiście $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Wtedy

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Funkcja g ma ciągłe pochodne cząstkowe, więc jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym.

Twierdzenie 1 (Cauchy–Riemann). *Niech $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$, gdzie Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbf{C}$. Jeżeli $f = u + iv$ jest holomorficzna w punkcie $a \in \Omega$, to jest różniczkowalna jako odwzorowanie z Ω w $\mathbf{R}^2$, a macierzą jej pochodnej jest*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & -\frac{\partial v}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial x}(a) \end{pmatrix}.$$

Zachodzą zatem równania

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

Odwrotnie, jeśli f jest w sensie rzeczywistym różniczkowalna w a i spełnia równania C-R, to jest holomorficzna oraz

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a).$$

Dowód. Przypomnijmy, że odwzorowanie $f : \Omega \to \mathbf{R}^2$, gdzie Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbf{R}^2$ jest różniczkowalne w sensie rzeczywistym w punkcie $a \in \Omega$ i ma pochodną $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (która jest odwzorowaniem liniowym), jeśli

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\|\to 0} 0$$

Niech

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}.$$

Z drugiej strony rózniczkowalność zespolona f, jako funkcji $f : \Omega \to \mathbf{C}$ oznacza, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - ch|}{|h|} = 0,$$

gdzie

$$c = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}.$$

Zauważmy, że odwzorowanie $h \to ch$ jest też liniowe nad $\mathbf{R}$ i

$$\begin{aligned} ch &= (\alpha + i\beta)(h_1 + ih_2) = (\alpha h_1 - \beta h_2) + i(\beta h_1 + \alpha h_2) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha h_1 - \beta h_2 \\ \beta h_1 + \alpha h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

więc jego macierzą jest

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Stąd natychmiast wynika nasza teza. □

W dalszym ciągu wykładu będziemy korzystać z rozmaitych oznaczeń dotyczących pochodnych zespolonych i rzeczywistych. Aby się w nich nie pogubić, sporządzimy teraz ich listę, do której można będzie zawsze w razie wątpliwości powrócić.

Niech $f = u + iv : \Omega \to \mathbf{C}$ będzie holomorficzna w punkcie $z = x + iy \in \Omega$. Pochodna zespolona f w punkcie z jest liczbą i oznaczamy ją przez

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial}{\partial x} f(z) + i \frac{\partial}{\partial y} f(z).$$

Owzorowanie liniowe $h \to f'(z)h$ możemy też interpretować jako pochodną rzeczywistą odworowania $f = (u, v) : \Omega \to \mathbf{R}^2$ o macierzy

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Jak widać liczby zespolone $\frac{\partial}{\partial x} f(z)$ i $\frac{\partial}{\partial y} f(z)$ są kolumnami tej macierzy. Natomiast jej wiersze to gradienty u i v, które będziemy oznaczać przez

$$\nabla u(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y), \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + i \frac{\partial}{\partial y} u(x, y),$$

$$\nabla v(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x, y), \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) + i \frac{\partial}{\partial y} v(x, y).$$

Jak łatwo zauważyć, powyższa notacja pozwala zapisać równania Cauchy'ego-Riemanna w zwięzłej postaci:

$$\nabla v(z) = i \nabla u(z).$$

Jeszcze inną postacią tych równań jest

$$\frac{\partial}{\partial y} f(z) = i \frac{\partial}{\partial x} f(z).$$

Przykład. Niech $f(z) = z^2$. Wtedy

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy),$$

czyli

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \ , \qquad v(x, y) = 2xy.$$

Mamy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

i

$$\frac{(z + h)^2 - z^2}{h} = \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} = 2z + h \xrightarrow{h \to 0} 2z.$$

Otrzymujemy więc

$$(z^2)' = 2z$$

oraz

$$f'(z) = 2x + i2y = 2z.$$

Niektóre własności różniczkowania zespolonego są analogiczne do własności różniczkowania w $\mathbf{R}$.

(1) Jeśli f, g są holomorficzne, to holomorficzne są również funkcje $f+g$, fg, f/g (o ile $g \neq 0$) i

$$(f+g)' = f' + g' , \qquad (fg)' = f'g + fg' , \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

(2) Jeśli $\Omega_1 \xrightarrow{f} \Omega_2 \xrightarrow{g} \mathbf{C}$ są holomorficzne, to holomorficzne jest $g \circ f$ i

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \qquad z \in \mathbf{C}.$$

(3) Jeśli $f \colon \Omega \xrightarrow[na]{1-1} U$ (gdzie $U, \Omega \subseteq \mathbf{C}$ są otwarte) jest holomorficzna, $f'(z) \neq 0$ dla $z \in \Omega$ i f^{-1} jest ciągła, to f^{-1} jest holomorficzna oraz

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} , \qquad z \in \Omega$$

czyli

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

Przykład. $z' = 1, \quad (z^2)' = 2z, \quad (z^n)' = nz^{n-1}$.

$$\begin{aligned} \frac{z^n - a^n}{z-a} &= \frac{(z-a)(z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \ldots + a^{n-1})}{z-a} \\ &= (z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \ldots + a^{n-1}) \xrightarrow{z \to a} na^{n-1} \end{aligned}$$

Przykład. Niech $f(z) = \frac{1}{z}$. Dla każdego $a \neq 0$

$$f(a+h) = \frac{1}{a+h} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{h}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n h^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n h^n}{a^{n+1}} \qquad \text{dla } |h| < |a|,$$

czyli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z-a)^n}{a^{n+1}}.$$

Funkcję f na zbiorze otwartym $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ nazywamy *analityczną*, jeśli dla każdego $a \in \Omega$ istnieje $r > 0$, takie że $K(a,r) \subseteq \Omega$ i istnieje ciąg współczynników a_n, takich że

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n \qquad \text{dla } |h| < r.$$

Funkcja $z \to \frac{1}{z}$ jest funkcją analityczną, ponieważ w otoczeniu każdego punktu rozwija się w szereg potęgowy.

Twierdzenie 2. *Jeśli f jest analityczna na zbiorze otwartym $\Omega \subseteq \mathbf{C}$, to jest na tym zbiorze holomorficzna.*

Dowód. Niech $a \in \Omega$, $f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$, $|h| < r$ oraz $a_0 = f(a)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{a_0 - f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n h^n}{h} = \frac{a_0 - f(a) + h\sum_{n=1}^{\infty} a_n h^{n-1}}{h} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n h^{n-1} \xrightarrow{h\to 0} a_1\end{aligned}$$

Zatem

$$a_1 = f'(a).$$

□

3. *Funkcja zadana szeregiem potęgowym*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < r,$$

jest analityczna.

Dowód. Niech $|z| < r$ będzie ustalone i niech $|h| < r - |z|$. Wtedy $|z+h| < r$ i

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} z^{n-k} h_k.$$

Zauważmy, że szereg podwójny występujący po prawej stronie jest bezwzględnie zbieżny, bo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \left| a_n \binom{n}{k} z^{n-k} h_k \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z| + |h|)^n < \infty, \qquad |z| + |h| < r,$$

i wobec tego wolno zmienić kolejność sumowania, co daje

$$f(z+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z) h^k,$$

gdzie

$$\alpha_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n z^{n-k}.$$

□

4. *Jeśli funkcja f zadana jest szeregiem potęgowym*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < r,$$

to

$$f'(z) = \alpha_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n, \qquad |z| < r.$$

Podkreślmy, że promień zbieżności szeregu $f'(z)$ jest taki sam, jak promień $f(z)$. Widać też, że szereg potęgowy różniczkuje się tak, jak wielomian, czyli „wyraz po wyrazie". Widać też, że funkcja

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}, \qquad |z| < r,$$

jest funkcją pierwotną dla f, bo oczywiście $F'(z) = f(z)$ dla $|z| < r$. Szereg definiujący F ma ten sam promień zbieżności.

Z tego, co już wiemy, przez łatwą indukcję wynika, że funkcja zadana szeregiem potęgowym jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w sensie zespolonym wewnątrz koła zbieżności i

$$f^n(z) = n!\alpha_n(z),$$

a w szczególności

$$f^n(0) = n!a_n.$$

To, co wiemy o szeregach potęgowych, bez trudu przenosimy na funkcje analityczne.

Twierdzenie 5. *Niech $f : \Omega \to \mathbf{C}$ będzie funkcją analityczną w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbf{C}$. Wówczas dla każdego $z \in \Omega$*

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z)}{n!} h^n, \qquad |z| < r.$$

Innymi słowy, funkcja analityczna jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w sensie zespolonym i rozwija się w szereg Taylora wokół każdego punktu swojej dziedziny.

I jeszcze twierdzenie o wartości średniej. Przypomnijmy najpierw twierdzenie Lagrange'a:

6. *Jeśli $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą na $[\alpha, \beta]$ i rózniczkowalną w (α, β), to istnieje punkt $t_0 \in (\alpha, \beta)$, taki że*

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \varphi'(t_0)(\beta - \alpha).$$

Niestety twierdzenie Lagrange'a nie przenosi się dosłownie na przypadek zespolony. Powodem tego jest, że punkt pośredni dla części rzeczywistej funkcji nie jest na ogół równy punktowi pośredniemu dla części zespolonej. Tym niemniej prawdziwe jest następujące pożyteczne oszacowanie.

Twierdzenie 7 (o wartości średniej). *Niech $\Omega \subset \mathbf{C}$ będzie otwarty i niech*

$$f = u + iv : \Omega \to \mathbf{C}$$

będzie holomorficzna. Jeśli $[a, b] \subset \Omega$, to istnieje $c \in (a, b)$, takie że

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |f'(c)| \cdot |b - a|.$$

Dowód. Niech

$$\varphi(t) = u(a + t(b-a)), \qquad \psi(t) = v(a + t(b-a)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Na mocy twierdzenia Lagrange'a istnieją $0 < t_1, t_2 < 1$, takie że

$$\begin{aligned} u(b) - u(a) &= \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_1) \\ &= < \nabla u(a + t_1(b-a)), b - a > = < u(c_1), b - a > \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} v(b) - v(a) &= \psi(1) - \psi(0) = \psi'(t_2) \\ &= < \nabla v(a + t_2(b-a)), b - a > = < v(c_2), b - a >, \end{aligned}$$

gdzie $c_1 = a + t_1(b-a)$, $c_2 = a + t_2(b-a)$.

Mamy więc

$$
\begin{aligned}
|f(b)-f(a)| &= \sqrt{|u(b)-u(a)|^2+|v(b)-v(a)|^2} \\
&= \sqrt{|\nabla u(c_1)|^2+|\nabla v(c_2)|^2}\cdot|b-a|.
\end{aligned}
$$

Pozostaje zauważyć, że skoro $\nabla v(z) = i\nabla u(z)$, to $|\nabla u(z)| = |\nabla v(z)|$ i jeśli c jest tym punktem c_j, gdzie $|\nabla(c_j)|$ ma większą wartość, to

$$
\sqrt{|\nabla u(c_1)|^2+|\nabla v(c_2)|^2} \leqslant \sqrt{|\nabla u(c)|^2+|\nabla v(c)|^2} = |f'(c)|.
$$

□

Wniosek 8. *Niech f będzie funkcją holomorficzną na obszarze $\Omega\subset\mathbf{C}$. Jeśli $f'(z)=0$ dla $z\in\Omega$, to f jest funkcją stałą.*

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że $f(a)\neq f(b)$ dla pewnych $a,b\in\Omega$. Połączmy punkty a i b łamaną

$$
\Gamma = [z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n], \qquad a = z_0, b = z_n.
$$

Istnieje $0\leqslant k<n$, takie że $f(z_k)\neq f(z_{k+1}$. Ale na mocy twierdzenia o wartości średniej mamy

$$
|f(z_{k+1}-f(z_k)| \leqslant |f'(c)|\cdot|z_{k+1}-z_k|,
$$

gdzie $c\in(z_k, z_{k+1})$. Skoro jednak $f'(c)=0$, to $f(z_{k+1})=f(z_k)$ i mamy sprzeczność. □