5. Funkcja pierwotna i wzór całkowy Cauchy'ego

Jesteśmy w sercu teorii i zmierzamy do jej najważniejszego twierdzenia. Po nim nastąpią bardzo ważne wnioski. Kluczowym pytaniem jest w tej chwili pytanie o istnienie funkcji pierwotnej.

Mówimy, że funkcja F określona w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbf{C}$ jest *pierwotną* dla funkcji $f : \Omega \to \mathbf{C}$, jeśli jest holomorficzna i $F' = f$. Wiemy, że w dziedzinie rzeczywistej każda funkcja ciągła w przedziale otwartym ma pierwotną, tu jednak jest inaczej.

Zauważmy, że jeśli funkcja F jest pierwotną funkcji f, to dla każdej drogi $\gamma^\star \subset \Omega$ łączącej punkty a i b

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a),$$

a więc całka po każdej drodze zamkniętej musi znikać. Mówimy wtedy, że *całka z f nie zależy od drogi.* Jest to niewątpliwie warunek konieczny istnienia pierwotnej. Przykład

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

pokazuje, że funkcja ciągła, a nawet holomorficzna $z \to 1/z$ nie ma pierwotnej w obszarze $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Lemat 1. *Funkcja zespolona f określona w otwartym podzbiorze Ω płaszczyzny ma pierwotną, wtedy i tylko wtedy gdy jej całka nie zależy od drogi.*

Dowód. Przed chwilą zobaczyliśmy, że jeśli f ma pierwotną, to całka z f nie zależy od drogi.

A oto wynikanie odwrotne. Niech a będzie ustalonym punktem obszaru Ω. Dla dowolnego $z \in U$ definiujemy

$$F(z) = \int_\Gamma f(z)\,dz,$$

gdzie na mocy założenia wartość całki nie zależy od wyboru łamanej

$$\Gamma = [a, z_1, z_2, \dots, z_n, z]$$

łączącej a i z. Zatem funkcja F jest dobrze zdefiniowana. Pokażemy, że F jest pierwotną naszej funkcji f.

Niech $h \in K(z, r) \subset \bar{K}(z, r) \subset U$. Niech

$$\Gamma_1 = [a, z_1, z_2, \dots, z_n, z, z + h].$$

Wtedy

$$\begin{aligned} h^{-1}(F(z+h) - F(z)) - f(z) &= h^{-1}\left(\int_{\Gamma_1} f(u)\,du - \int_\Gamma f(u)\,du\right) - f(z) \\ &= h^{-1}\int_{[z,z+h]} (f(u) - f(z))\,du. \end{aligned} \tag{2}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Jako że f jest ciągła

$$|h^{-1}(F(z+h) - F(z)) - f(z)| \leqslant |h|^{-1}\int_{[z,z+h]} |f(u) - f(z)|\,du \leqslant \varepsilon$$

dla dostatecznie małych h, co wobec dowolności ε daje tezę. $\square$

A oto podstawowe twierdzenie teorii.

Twierdzenie 3. *W obszarze jednospójnym całka z funkcji holomorficznej nie zależy od drogi.*

To twierdzenie przyjmiemy bez dowodu.

Wniosek 4. *W obszarze jednospójnym funkcja holomorficzna ma pierwotną.*

Wniosek 5. *Niech f będzie holomorficzna w otoczeniu $\overline{K}(a,R)$. Jeśli $\overline{K}(b,r) \subset K(a,R)$, to*

$$\int_{|z-a|=R} \frac{f(z)\,dz}{z-b} = \int_{|z-b|=r} \frac{f(z)\,dz}{z-b}.$$

Dowód. Poprowadźmy średnicę przez punkty a i b. Niech c_1 i c_2 będą jej końcami i niech c_1 leży bliżej a niż b. Niech d_1 będzie punktem przecięcia $C(b,r)$ ze średnicą $[c_1,c_2]$ po stronie c_1, a d_2 po stronie c_2. Rozważmy dwie drogi

$$\gamma_1 = c_1c_2 + [c_2,d_2] - d_2d_1 + [d_1,c_1]$$

oraz

$$\gamma_2 = c_2c_1 + [c_1,d_1] - d_1d_2 + [d_2,c_2].$$

Czytelnik, który sporządzi staranny rysunek, bez trudu się przekona, że

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-b} + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-b} = \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)\,dz}{z-b} - \int_{|z-b|=r} \frac{f(z)\,dz}{z-b}.$$

Ponadto mamy

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-b} = \int_{\gamma_2} \frac{f(z)\,dz}{z-b} = 0.$$

Aby się przekonać, że pierwsza z całek znika, wystarczy zauważyć, że $\gamma_1^\star$ zawiera sie w zbiorze $K(a,R) \setminus [b,\infty)$, gdzie pólprosta $[b,\infty)$ jest prostopadła do średnicy $[c_1,c_2]$ i nie przecina $\gamma_1^\star$. Jest to bowiem obszar gwiaździsty, a funkcja podcałkowa jest w nim holomorficzna. Podobnie uzasadniamy zerowanie się drugiej całki.

W takim razie

$$\int_{|z-b|=r} \frac{f(z)\,dz}{z-b} = \int_{|z-R|} \frac{f(z)\,dz}{z-b},$$

co wynika z poprzedniego wniosku. □

Wniosek 6 (wzór Cauchy'ego). *Jeśli funkcja f jest holomorficzna w otoczeniu $\overline{K}(a,R)$, to dla każdego $b \in K(a,R)$*

$$f(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-b} dz.$$

Dowód. Z lematu wynika, że

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{z-b} dz = \lim_{r\to 0} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-b} dz,$$

a z drugiej strony dla danego $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-b}\, dz - f(b) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)-f(b)}{z-b}\, dz \right|$$
$$\leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)-f(b)}{z-b} - f'(b)\, dz \right| \leqslant \varepsilon,$$

jeśli $r > 0$ jest tak małe, że

$$|f(z) - f(b) - f'(b)(z-b)| \leqslant \varepsilon |z-b|.$$

$\square$

Przykład. Mamy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{e^z}{z}dz = e^0 = 1, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{dz}{z} = 1.$$

Wniosek 7. *Funkcja holomorficzna w zbiorze otwartym jest analityczna.*

Dowód. Niech $a \in \overline{K}(a,r) \subseteq \Omega$, $h \in \mathbf{C}$ oraz $a+h \in K(a,r)$. Wtedy

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-(a+h)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{h}{z-a}}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{h}{z-a}\right)^n dz \end{aligned}$$

dla takich h, że $|h| < r$, czyli $\left|\frac{h}{z-a}\right| < 1$. przyjmując $|h| \leqslant \rho < 1$, widzimy że szereg jest zbieżny jednostajnie i

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right)h^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n h^n.$$

Promień zbieżności tego szeregu będzie tak duży, na jak duże koło pozwala obszar, a więc co najmniej taki, jak odległość punktu od brzegu. $\square$

Zapamiętajmy:

8. *Pojęcia holomorficzności i analityczności funkcji w ustalonym zbiorze otwartym w* $\mathbf{C}$ *są równoważne.*

Uwaga. Jeśli funkcja f jest holomorficzna w Ω, to ma pochodne zespolone wszystkich rzędów i

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \qquad \bar{K}(a,r) \subset \Omega,$$

co wynika z poprzedniego dowodu.

Mówimy, że funkcja holomorficzna ma w punkcie a *zero krotności* k, jeśli

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0, \qquad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Łatwo zauważyć, że jest to równoważne istnieniu w pewnym otoczeniu a funkcji holomorficznej h, takiej że

$$f(z) = (z-a)^k h(z), \qquad h(a) \neq 0.$$

Wniosek 9. *Jeśli funkcja f w obszarze Ω ma pierwotną, to jest holomorficzna.*

Dowód. Niech $F' = f$ w Ω. Skoro F jest holomorficzna, to jest analityczna, więc i jej pochodna f jest analityczna, a stąd holomorficzna. $\square$

Twierdzenie 10 (Morera). *Niech f bedzie funkcją ciągłą w obszarze Ω. Jesli dla każdego trójkąta, którego brzeg ma parametryzację $\gamma^\star \subset \Omega$, jest*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

to f jest holomorficzna.

Dowód. Założenie o f pociąga, że całka z f nie zależy od drogi po odcinkach w ustalonym kole. A skoro tak, to powtarzając rozumowanie przeprowadzone wyżej (patrz (2)), widzimy, że f ma pierwotną. W takim razie jest holomorficzna. $\square$

Zapamiętajmy:

11. *W obszarze jednospójnym $\Omega \subset \mathbf{C}$ funkcja ciągła f*

jest holomorficzna $\iff$ *ma pierwotną* $\iff$ *jej całka nie zależy od drogi*

Twierdzenie 12 (Liouville). *Jeśli f jest ograniczoną funkcją holomorficzną na całej płaszczyźnie $\mathbf{C}$, to jest funkcją stałą.*

Dowód. Niech $|f(z)| \leqslant M$ dla $z \in \mathbf{C}$. Nasze założenia gwarantuja możliwość rozwinięcia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

o nieskończonym promieniu zbieżności. Wobec tego dla każdego $r > 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})\,dt}{r^n},$$

skąd

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{2\pi r^n},$$

co wobec dowolności $r > 0$ oznacza $a_n = 0$ dla $n \geqslant 1$. Zatem rozwinięcie f redukuje się do

$$f(z) = a_0 = f(0),$$

więc f jest funkcja stałą.

$\square$