6. Punkty osobliwe, residua i obliczanie całek

Mówimy, że funkcja holomorficzna f ma w punkcie a *zero krotności* k, jeśli

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0, \qquad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Rozwijając f w szereg Taylora w otoczeniu a, łatwo zauważyć, że jest to równoważne istnieniu w pewnym otoczeniu a funkcji holomorficznej h, takiej że

$$f(z) = (z-a)^k h(z), \qquad h(a) \neq 0.$$

Na przykład funkcja

$$f(z) = \cos z - 1$$

ma w punkcie $a = 0$ zero krotności 2, bo

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = z^2 h(z),$$

gdzie

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2(n-1)}}{(2n)!}, \qquad h(0) = -1/2.$$

Wprowadźmy nowe oznaczenie

$$K'(a,r) = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z-a| < r\}.$$

Niech funkcja f będzie holomorficzna w $K'(a,r)$. Mówimy wtedy, że f ma *punkt osobliwy* a albo *osobliwość* w punkcie a. Możliwe są trzy sytuacje:

1) Funkcja f jest ograniczona w pewnym otoczeniu a;
2) Funkcja f ma granicę równą ∞ w punkcie a;
3) Funkcja f nie ma granicy w punkcie a.

Lemat 1. *Jeśli f jest holomorficzna w $K'(a,r)$ i ograniczona, to istnieje granica*

$$A = \lim_{z \to a} f(z)$$

i po rozszerzeniu f o wartość $f(a) = A$ otrzymujemy funkcję holomorficzną na $K(a,r)$. Mówimy wtedy, że f ma w punkcie a osobliwość pozorną.

Dowód. Niech $g(z) = (z-a)^2 f(z)$ dla $z \neq a$ i $g(a) = 0$. Bezpośrednio widzimy, że g jest holomorficzna i $g'(a) = 0$. Zatem g ma w a zero co najmniej dwukrotne, więc istnieje funkcja holomorficzna h, taka że

$$g(z) = (z-a)^2 f(z) = (z-a)^2 h(z), \qquad z \in K'(a,r),$$

co pokazuje, że h jest holomorficznym przedłużeniem f na całe koło $K(a,r)$. □

Lemat 2. *Jeśli f jest holomorficzna w $K'(a,r)$ i $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, to istnieją $m \in \mathbf{N}$ i funkcja holomorficzna g w $K(a,r)$, takie że $g(a) \neq 0$ oraz*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, \qquad z \in K(a,r).$$

Mówimy wtedy, że f ma biegun krotności m w punkcie a.

Dowód. Przy przyjętych założeniach

$$\lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0,$$

a więc na mocy poprzedniego lematu funkcję $f_1(z) = 1/f(z)$ można uznać za holomorficzną na pewnym kole $K(a, r_1)$, jeśli położyć $f_1(a) = 0$. Przypuśćmy, że miejsce zerowe f_1 jest krotności m. Wtedy

$$f_1(z) = (z-a)^m h_1(z),$$

gdzie h_1 jest holomorficzna w otoczeniu a i $h_1(a) \neq 0$. Ostatecznie

$$f(z) = (z-a)^{-m} g(z),$$

gdzie $g(z) = 1/h_1(z)$. Wzor ten obowiązuje na razie tylko na małym otoczeniu a, ale łatwo zauważyć, że $g(z) = (z-a)^m f(z)$ ma rozszerzenie na całe koło $K(a, r)$. □

Lemat 3. *Jeśli f jest holomorficzna w $K'(a, r)$ i nie ma granicy, to jest nieograniczona w każdym zbiorze $K'(a, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon$. W tym przypadku mówimy, że f ma w a istotną osobliwość.*

Jak wiemy, gdy f jest holomorficzna w $K'(a, r)$, wartość całki

$$\int_{|z-a|=\rho} f(z)\, dz$$

nie zależy od $0 < \rho < r$. W opisanej sytuacji liczbę

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z)\, dz$$

nazywamy *residuum* funkcji f w punkcie osobliwym a.

Zauważmy, że wzór Cauchy'ego dla funkcji holomorficznej w $K(a, r)$ można wyrazić tak

$$f(a) = \operatorname{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{z-a}.$$

Lemat 4. *Jeśli f ma w punkcie a biegun krotności nie większej niż m, to jej residuum możemy wyznaczyć według wzoru*

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \{(z-a)^m f(z)\}^{(m-1)}.$$

Dowód. Jak wiemy w pewnym sąsiedztwie punktu a funkcja przedstawia się jako

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m},$$

gdzie g jest funkcją holomorficzną w otoczeniu a. Zatem dla małego $r > 0$

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{g(z)\, dz}{(z-a)^m} = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!},$$

co wynika ze wzorów Cauchy'ego na pochodne funkcji holomorficznej. Pozostaje zauważyć, że

$$g^{(m-1)}(a) = \lim_{z\to a} \{(z-a)^m f(z)\}^{(m-1)}.$$

□

Niech $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ będzie drogą. Przypomnijmy, że jeśli $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, to

$$\int_\gamma f(x,y)\,dx = \int_0^1 f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t)\,dt,$$

oraz

$$\int_\gamma f(x,y)\,dy = \int_0^1 f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,dt.$$

Można więc napisać

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(x,y)\,dx + i\int_\gamma f(x,y)\,dy$$

dla każdej funkcji f ciągłej na $\gamma^\star$. Jeśli ponadto $f = u + iv$, to

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma u\,dy + v\,dx.$$

Przypomnijmy

Twierdzenie 5 (Green). *Niech Ω będzie obszarem ograniczonym,którego brzeg $\partial\Omega$ ma parametryzację łańcuchem $\mathcal{C}$. Wowczas dla każdej funkcji p ciągłej na $\overline{\Omega}$ i klasy $C^1(\Omega)$*

$$\int\int_\Omega \partial_x p(x,y)\,dxdy = \int_{\mathcal{C}} p(x,y)\,dy$$

oraz

$$\int\int_\Omega \partial_y p(x,y)\,dxdy = -\int_{\mathcal{C}} p(x,y)dx.$$

Twierdzenie 6 (o residuach). *Niech Ω będzie obszarem ograniczonym, którego brzeg $\partial\Omega$ ma parametryzację łańcuchem $\mathcal{C}$. Niech $A \subset \Omega$ będzie zbiorem skończonym i niech $f : \Omega \setminus A \to \mathbf{C}$ będzie holomorficzna i ciągła na brzegu $\partial\Omega$. Wtedy*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \sum_{a\in A} \operatorname{Res}_{z=a} f(z).$$

Dowód. Dla każdego $a \in A$ niech $r_a > 0$ bedzie tak małe, by koła $\overline{K}(a, r_a)$ były parami rozłączne i zawarte w Ω. Wtedy brzeg obszaru

$$\Omega_1 = \Omega \setminus \bigcup_{a\in A} \overline{K}(a, r_a)$$

ma parametryzację łańcuchem

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} - \sum_{a\in a} C(a, r_a).$$

Nasza funkcja $f = u + iv$ jest holomorficzna w Ω_1, więc klasy C^1, i na mocy twierdzenia Greena oraz rownań Cauchy'ego-Riemanna

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1} f(x,y)\,dz &= \int_{\mathcal{C}_1} f(x,y)\,dx + i\int_{\mathcal{C}_1} f(x,y)\,dy \\ &= \int_\Omega \partial_y f(x,y)\,dxdy - i\int_\Omega \partial_x f(x,y)\,dxdy = 0,\end{aligned} \tag{7}$$

czyli

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \sum_{a\in A}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r_a} f(z)\,dz = \sum_{a\in A} \operatorname{Res}_{z=a} f(z).$$

□

Twierdzenie 8. *Niech f będzie funkcją ciągłą w górnej półpłaszczyźnie* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ *i holomorficzną w otwartej półpłaszczyźnie* $\operatorname{Im} z > 0$ *z wyjątkiem skończonej liczby punktów* $\{a_j\}_{j=1}^N$*. Jeśli ponadto*

$$\lim_{z\to\infty,\, \operatorname{Im} z>0} |zf(z)| = 0,$$

to

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z).$$

Dowód. Niech $R > 0$ bedzie tak duże, aby wszystkie punkty a_j znalazły się wewnątrz koła $K(0,R)$. Wtedy na mocy twierdzenia o residuach

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R,\, \operatorname{Im} z>0} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z).$$

Jak widać, prawa strona nie zależy od R. Ponadto

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=R,\, \operatorname{Im} z>0} f(z)\,dz\right| &\leqslant 2\pi R \sup_{|z|=R} |f(z)|\\ &= 2\pi \sup_{|z|=R} |zf(z)| \to 0, \qquad R = |z| \to \infty,\end{aligned}$$

na mocy założenia. Zatem

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z).$$

□

Dla przykładu obliczymy całkę

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{1+x^4}.$$

Najpierw zauważmy, że funkcja

$$f(z) = \frac{\cos z}{1+z^4}$$

jest rzeczywiście holomorficzna w górnej półpłaszczyźnie i ciągła w półpłaszczyźnie domkniętej, ale niestety nie jest prawdą, że

$$\lim_{z\to\infty,\, \operatorname{Im} z\geqslant 0} \frac{z\cos z}{1+z^4} = \infty.$$

Aby tę trudność obejść, wykorzystamy tożsamość

$$f(z) = \frac{\cos z}{1+z^4} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2(1+z^4)}.$$

Niech

$$f_1(z) = \frac{e^{iz}}{2(1+z^4)}, \qquad f_2(z) = \frac{e^{-iz}}{2(1+z^4)}.$$

Wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,dx.$$

Obliczymy te całki osobno. Najpierw sprawdźmy, że pierwsza funkcja spełnia warunek malenia w nieskończoności. Rzeczywiście,

$$\left|\frac{e^{ix-y}}{1+(x+iy)^4}\right| \leqslant \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2-1} \to 0, \tag{9}$$

gdy $x^2+y^2 \to \infty$ i $y \geqslant 0$. Druga rzecz, to punkty osobliwe f_1. Są to

$$a_1 = e^{i\pi/4}, \qquad a_2 = e^{i3\pi/4}, \qquad a_3 = -a_1, \qquad a_4 = -a_2,$$

z których tylko pierwsze dwa leżą w górnej półpłaszczyźnie. Zatem

$$f_1(z) = \frac{e^{iz}}{2(z^2-a_1^2)(z^2-a_2^2)}.$$

Na podstawie twierdzenia wiemy, że

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx &= \operatorname{Res}_{z=a_1} f_1(z) + \operatorname{Res}_{z=a_2} f_1(z)\\ &= (\operatorname{Res}_{z=a_1} + \operatorname{Res}_{z=a_2})\frac{e^{iz}}{2(z^2-a_1^2)(z^2-a_2^2)}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ia_1}}{2a_1(a_1^2-a_2^2)} - \frac{e^{ia_2}}{2a_2(a_1^2-a_2^2)}\right) = \frac{e^{ia_1}a_2 - e^{ia_2}a_1}{4a_1a_2(a_1+a_2)},\end{aligned}$$

a więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = \frac{(e^{ia_1}a_2 - e^{ia_2}a_1)}{2a_1a_2(a_1+a_2)}\cdot \pi i.$$

Przechodząc do drugiej całki, znowu napotykamy trudność. Ze względu na zmianę znaku w wykładniku, oszacownie (9) załamuje się. Wystarczy jednak mała poprawka. Mamy bowiem

$$\begin{aligned}2\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{1+x^4}\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^4}\,dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx.\end{aligned}$$

Ostatecznie więc,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{1+x^4} = 2\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = \frac{(e^{ia_1}a_2 - e^{ia_2}a_1)}{a_1a_2(a_1+a_2)}\cdot \pi i.$$

Czytelnikowi pozostawiamy podstawienie odpowiednich wartości i doprowadzenie wyniku do możliwie prostej postaci.