Grzegorz Plebanek

Rozdział IV: Przestrzenie Banacha i przestrzenie Hilberta

1. Przykłady przestrzeni Banacha

Będziemy rozważać przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$; jeżeli w danym momencie specyfikacja ciała nie jest niezbędna to ciało liczbowe oznaczać będziemy przez $\mathbb{F}$.

Przypomnijmy, że X nazywamy przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$ jeżeli w X określone jest dodawanie elementów, zdefiniowane jest mnożenie elementów X przez liczby z $\mathbb{F}$ i działania te spełniają naturalne aksjomaty $\boxed{?}$. W dalszym ciągu elementy $x, y, \ldots \in X$ nazywać będziemy wektorami, a $a, b, c, \ldots \in \mathbb{F}$ skalarami.

Przykład 1.1. Najbardziej oczywistymi przestrzeniami liniowymi są $\mathbb{R}^n$ oraz $\mathbb{C}^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Działania dodawania i mnożenia są zdefiniowane "po współrzędnych". $\diamondsuit$

Definicja 1.2 *Jeżeli X jest przestrzenią liniową to odwzorowanie*

$$||\cdot|| : \ X \to \mathbb{R}$$

nazywamy **normą** *jeśli ma ono następujące własności dla dowolnych $x, y \in X$ i $a \in \mathbb{F}$*

$||x|| \geqslant 0$, $||x|| = 0$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $x = 0$;

$||ax|| = |a| \; ||x||$;

$||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Przestrzeń X z ustaloną normą nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

Normę wektora x należy interpretować jako jego długość, albo też odległość punktu x od 0. Co więcej, prawdziwy jest następujący fakt.

Lemat 1.3 *Każda przestrzeń unormowana X jest przestrzenią metryczną, gdzie metryka zadana jest wzorem $\rho(x, y) = ||x - y||$ dla $x, y \in X$.*

Dowód. Bez trudu sprawdzamy, że aksjomaty metryki wynikają bezpośrednio z własności normy. Na przykład

$$\rho(x, y) = ||x - y|| = ||(-1)(y - x)|| = | - 1| \; ||y - x|| = \rho(y, x);$$

$$\rho(x, y) = ||x - y|| = ||(x - z) + (z - y)|| \leqslant ||x - z|| + ||z - y|| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

$\diamondsuit$

Odległość zdefiniowana za pomocą metryki ma szczególną własność: jest niezmiennicza na przesunięcia, to znaczy $\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$ dla dowolnych x, y, z.

Przykład 1.4. Niektóre przestrzenie metryczne rozważane w części I skryptu były w istocie przestrzeniami unormowanymi. Sprawdziliśmy już (patrz lista zadań nr 1), że wzór

$$||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

definiuje normę (euklidesową); a metryka euklidesowa jest po prostu dana przez $||x-y||$. Podobnie sprawdzamy, że normę w $\mathbb{C}^n$ można określić wzorem

$$||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.$$

Innym przykładem przestrzeni unormowanej jest $X = C[a,b]$ z normą

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\};$$

przypomnijmy, że metryka supremum w tej przestrzeni jest zadana przez $||f-g||$. $\diamondsuit$

Definicja 1.5 *Przestrzeń liniową X (nad ciałem $\mathbb{F}$) z wyróżnioną normą nazywamy* **przestrzenią Banacha** *jeżeli metryka zdefiniowana przez tę normę jest zupełna.*

Zauważmy, że zbieżność ciągu x_n do x w przestrzeni unormowanej X oznacza po prostu, że $\lim ||x_n - x|| = 0$. Podobnie zupełność oznacza, że jeśli x_n jest ciągiem Cauchy'ego, czyli $||x_n - x_m||$ dąży do zera wraz z $n, m \to \infty$ to istnieje w X granica tego ciągu.

Przestrzeń Banacha to jeden z podstawowych obiektów współczesnej matematyki; termin ten został utworzony na cześć Stefana Banacha (1892–1945), jednego z najwybitniejszych polskich matematyków, twórcy analizy funkcjonalnej.

Przykład 1.6. Przestrzenie $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $C[0,1]$ (z odpowiednimi normami) są przestrzeniami Banacha — zupełność sprawdziliśmy w części I. Przykładem przestrzeni unormowanej niezupełnej jest, jak pamiętamy, $C[0,1]$ z normą określoną przez całke

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

$\diamondsuit$

W dalszym ciągu, przy sprawdzaniu własności norm użyteczne będą następujące klasyczne nierówności.

Lemat 1.7 *Dla dowolnych lizb $a, b, p, q > 0$, jeśli $1/p + 1/q = 1$ to*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję $g(t) = t^{p-1}$ na odcinku $[0, a]$ oraz odwrotną do niej funkcję $g(s) = s^{1/(p-1)}$ na odcinku $[0, b]$. Elementarne rozważania pokazują, że pole pod wykresem funkcji g plus pole pod wykresem funkcji h przekracza pole prostokąta o bokach a, b. Stąd

$$ab \leqslant \int_0^a t^{p-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^b s^{1/(p-1)}\,\mathrm{d}s = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

gdyż, jak łatwo sprawdzić, $1/(p-1) + 1 = q$. ♢

Lemat 1.8 *Dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$ i $p, q > 0$ takich że $1/p + 1/q = 1$ zachodzi następująca nierówność* **Cauchy'ego–Höldera**

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

Dowód. Dla ustalonego $k \leqslant n$ podstawmy w nierówności z poprzedniego lematu

$$a = \frac{|x_k|}{(\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{1/p}}, \quad b = \frac{|y_k|}{(\sum_{j=1}^n |y_j|^q)^{1/q}}.$$

Otrzymane w ten sposób n nierówności sumujemy stronami i otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^n \frac{|x_k y_k|}{(\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{1/p} (\sum_{j=1}^n |y_j|^q)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

co daje żądaną nierówność. ♢

Lemat 1.9 *Dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$ i $p \geqslant 1$ zachodzi następująca* **nierówność Minkowskiego**

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Dowód. Łatwo sprawdzić nierówność w przypadku, gdy $p = 1$. Ustalmy więc $p > 1$ i niech q będzie taką liczbą, że $1/p + 1/q = 1$. Poniżej dwukrotnie zastosujemy nierówność CH;

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} =$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p}\right] \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{1/q},$$

gdzie uwzględniliśmy $(p-1)q = p$. Teraz dzieląc obie strony nierówności przez

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/q}$$

otrzymujemu żądaną nierówność, bo $1 - 1/q = 1/p$. $\diamondsuit$

Podstawiając w nierówności Minkowskiego $p = 2$ otrzymujemy zwykłą nierówność trójkąta dla normy euklidesowej.

PRZYKŁAD 1.10. Na przestrzeni liniowej $\mathbb{F}^n$ (gdzie $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) możemy określić dla każdego $p \geqslant 1$ normę wzorem

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Istotnie, nierówność Minkowskiego oznacza, że $||\cdot||_p$ spełnia nierówność trójkąta; pozostałe własności wynikają łatwo z samej definicji. W ten sposób, dla każdego $p \geqslant 1$, $\mathbb{R}^n$ bądź $\mathbb{C}^n$ jest przestrzenią Banacha w normie $||\cdot||_p$ — zupełność sprawdzamy dokładnie tak, jak zupełność metryki euklidesowej (patrz też następny przykład). $\diamondsuit$

PRZYKŁAD 1.11. W podobny sposób jak w przypadku skończenie wymiarowym można określić różne normy na przestrzeni ciągów. Dla ustalonego wykładnika $p \geqslant 1$ niech

$$l_p = \{x = (x(n))_n : \sum_n |x(n)|^p < \infty\},$$

oznacza przestrzeń ciągów sumowalnych z p–tą potęgą. Dla $x \in l_p$ definujemy

$$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{1/p}.$$

Jeżeli $x, y \in l_p$ to dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ mamy z nierówności Minkowskiego

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x(n) + y(n)|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |x(n)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y(n)|^p\right)^{1/p} \leqslant ||x||_p + ||y||_p.$$

Stąd, przechodząc z N do granicy, $||x+y||_p \leqslant ||x||_p + ||y||_p$, co dowodzi nierówności trójkąta i jednocześnie pokazuje, że $x + y \in l_p$. Łatwo sprawdzić że także $cx \in l_p$ i $||cx||_p = |c|||x||_p$. Tym samym l_p z $||\cdot||_p$ jest przestrzenią unormowaną.

Sprawdzimy teraz, że l_p jest przestrzenią Banacha (czyli że norma jest zupełna). Niech $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \in l_p$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Dla ustalonego n

$$|x_k(n) - x_m(n)| \leqslant ||x_k - x_m||_p,$$

co pozwala stwierdzić, że ciąg liczb $x_k(n)$, $k = 1, 2, \ldots$ jest ciągiem Cauchy'ego; oznaczmy jego granicę przez $x(n) = \lim_{k\to\infty} x_k(n)$. W ten sposób zdefiniowaliśmy $x = (x(n))_n$;

należy teraz sprawdzić, że $x \in l_p$ oraz że x_k zbiega w normie do x. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$, $||x_k - x_m||_p < \varepsilon$ dla dużych k, m. Wtedy dla dowolnego N mamy

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_k(n) - x_m(n)|^p\right)^{1/p} \leqslant ||x_k - x_m||_p < \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy z m w powyższej nierówności otrzymujemy

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_k(n) - x(n)|^p\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon.$$

Biorąc teraz $N \to \infty$ otrzymujemy

$$||x_k - x||_p \leqslant \varepsilon$$

co dowodzi że x_k zbiega w normie do x; ponadto

$$||x||_p \leqslant ||x_k||_p + ||x - x_k||_p < \infty$$

więc istotnie $x \in l_p$.

W rachunkach powyżej nie było istotne, czy rozważamy ciągi liczb rzeczywistych, czy zespolonych. Zdefiniowaliśmy w ten sposób całą rodzinę przestrzeni Banacha l_p (p może przyjmować wszystkie wartości rzeczywiste $\geqslant 1$); zauważmy, że $l_p \subseteq l_{p'}$ dla $p < p'$, co wynika z kryterium porównawczego zbieżności szeregów: jeżeli $\sum_n |x(n)|^p < \infty$ to $|x(n)| < 1$ dla prawie wszystkich n, a wtedy $|x(n)|^{p'} \leqslant |x(n)|^p$. Mamy na przykład

$$l_1 \subseteq l_2 \subseteq l_{5/2} \subseteq \ldots$$

gdzie l_1 jest po prostu przestrzenią ciągów (szeregów) bezwzględnie zbieżnych. $\diamondsuit$

Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie ustalonym podzbiorem $\mathbb{R}$ (typowo $D = \mathbb{R}$ lub $D = [a, b]$) i rozważmy zbiór $L_1[D]$ wszystkich funkcji $D \to \mathbb{R}$ całkowalnych w sensie Lebesgue'a, czyli takich że $\int_D |f| \, d\lambda < \infty$. Wtedy $L_1[D]$ jest przestrzenią liniową $\boxed{?}$ i naturalne jest spróbować określić na tej przestrzeni normę wzorem

$$||f|| = \int_D |f| \, d\lambda,$$

porównaj Przykład 1.6. Z własności całki wynika że $||cf|| = |c| ||f||$ i $||f|+g|| \leqslant ||f||+||g||$. Jednakże istnieją funkcje $f \neq 0$ takie że $||f|| = 0$ (przypomnijmy, że tak jest gdy funkcja jest równa zero prawie wszędzie). Tym samym nie można powiedzieć, że $|| \cdot ||$ jest normą. Te niedogodność można pokonać w sposób następujący.

Relacja pomiędzy funkcjami $f = g$ prawie wszędzie jest relacją równoważności $\boxed{?}$ $\boxed{?}$ Jeżeli będziemy rozważać klasy abstrakcji względem tej relacji, to różne klasy abstrakcji $[f] \neq [g]$ będą odpowiadały funkcjom f i g, które istotnie się od siebie różnią. W praktyce niewygodnie jest operować klasami abstrakcji. Myślimy raczej, że elementami $L_1[D]$ są funkcje całkowalne, przy czym utożsamiamy funkcje równe prawie wszędzie. Przy tej interpretacji $||f|| = 0$ oznaczać będzie że $f = 0$ prawie wszędzie czyli że w istocie $f = 0$ (przy powyższej umowie). W ten sposób określamy przestrzeń unormowaną funkcji całkowalnych z naturalną normą całkową. Poniższe twierdzenie wymaga głębszej znajomości własności całki i dlatego dowód zostanie tu pominięty.

Twierdzenie 1.12 *Przestrzeń $L_1[D]$ z normą całkową jest przestrzenią Banacha.*

Tak jak w przypadku szeregów możemy teraz rozważać całą rodzinę przestrzeni Banacha $L_p[D]$, gdzie

$$L_p[D] = \{f : D \to \mathbb{R} : \int_D |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < \infty\};$$

na $L_p[D]$ rozważmy normę daną wzorem

$$||f||_p = \left(\int_D |f|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{1/p}.$$

Dla $p = 1$ jest to więc zwykła norma całkowa zdefinowana powyżej. Dowód nierówności trójkąta przebiega tak, jak dla szeregów, przy czym sumowanie zastępujemy całkowaniem. Przy sprawdzaniu że $||f||_p = 0$ pociąga $f = 0$ znowu odwołujemy się do faktu, że $\int_d |f|^p \,\mathrm{d}\lambda = 0$ implikuje $|f|^p = 0$ prawie wszędzie, czyli $f = 0$ prawie wszędzie, co oznacza, że traktujemy f jako funkcję równą zeru.

Analogicznie definiujemy zespolone przestrzenie funkcji całkowlanych. Dla funkcji $f : D \to \mathbb{C}$ mówimy, że f jest całkowalna jeżeli $\int_D |f| \,\mathrm{d}\lambda < \infty$. W takim przypadku całkę definiujemy przez rozłożenie funkcji na część rzeczywistą i urojoną: jeżeli $f = f_1 + if_2$ to

$$\int_D f \,\mathrm{d}\lambda = \int_D f_1 \,\mathrm{d}\lambda + i\int_D f_2 \,\mathrm{d}\lambda.$$

2. PRZESTRZENIE HILBERTA.

Najprościej mówiąc, przestrzenie Hilberta to przestrzenie Banacha, w których norma jest określona za pomocą iloczynu skalarnego. Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$; przypomnijmy, że dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ mówimy o rzeczywistej, a w przypadku $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ o zespolonej przestrzeni liniowej.

Definicja 2.1 *Funkcję $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ nazywamy* **iloczynem skalarnym** *jeżeli ma ona następujące własności dla wszystkich $x, y, z \in X$ i $a, b \in \mathbb{F}$*

(i) $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$;

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(iii) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$, $\langle x, x\rangle = 0$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $x = 0$

Warunki (i)–(ii) oznaczają, że $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jest formą półtoraliniową: warunek (i) mówi o liniowości ze względu na pierwszą zmienną, natomiast

$$\langle z, ax + by\rangle = \overline{\langle ax + by, z\rangle} = \overline{a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle} = \overline{a}\overline{\langle x, z\rangle} + \overline{b}\overline{\langle y, z\rangle} = \overline{a}\langle z, x\rangle + \overline{b}\langle z, y\rangle,$$

czyli że liniowość ze względu na drugą zmienną wymaga dopisania sprzężeń. Warunek (iii) mówi, że iloczyn skalarny jest dodatnio określony. W przypadku rzeczywistym sprzężenia można pominąć i wtedy iloczyn skalarny jest formą dwuliniową dodatnio określoną.

Przykład 2.2. Dla $x, y \in \mathbb{C}^n$ definujemy

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{m} x_k \overline{y_k}.$$

Łatwo sprawdzić, że istotnie jest to iloczyn skalarny. Zauważmy, że dopisanie sprzężenia przy y_k zapewnia warunek

$$\langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{m} x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{m} |x_k|^2 \geqslant 0,$$

przy czym $\langle x, x\rangle = 0$ implikuje $x = 0$. W przypadku rzeczywistym, szczególnie dla $n = 2$ wzór ten określa dobrze znany iloczyn skalarny na płaszczyźnie.

Zauważmy jeszcze, że wielkość $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ jest po prostu normą euklidesową wektora x. Jak się za chwilę okaże, jest to ogólna metoda zdefiniowania normy za pomocą iloczynu skalarnego. $\diamondsuit$

Rozważmy ustalony iloczyn skalarny na przestrzeni liniowej X; oznaczmy

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Lemat 2.3 *Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi następująca nierówność Schwartza*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||||y||.$$

Dowód. Załóżmy chwilowo, że $||y|| = 1$. Dla dowolnego $t \in \mathbb{C}$ mamy

$$0 \leqslant \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, ty\rangle + \langle ty, x\rangle + \langle ty, ty\rangle =$$

$$= ||x||^2 + \overline{t}\langle x, y\rangle + t\langle y, x\rangle + t\overline{t}\langle y, y\rangle = ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\,(t\langle x, y\rangle) + |t|^2.$$

Wstawiając $t = -\langle y, x\rangle$ otrzymujemy

$$0 \leqslant |x||^2 - 2|\langle x, y\rangle|^2 + |\langle x, y\rangle|^2,$$

czyli $|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||$.

W przypadku ogólnym gdy $||y|| > 0$ wystarczy zastosować powyższą nierówność do x i $y' = y/||y||$. $\diamondsuit$

Lemat 2.4 *Wzór $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ określa normę.*

Dowód. Jeżeli $||x|| = 0$ to $\langle x, x\rangle = 0$ więc $x = 0$.

$$||cx||^2 = \langle cx, cx\rangle = c\overline{c}\langle x, x\rangle = |c|^2||x||^2,$$

co pociąga jednorodność normy. Warunek trójkąta wynika z

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle =$$

$$= ||x||^2 + ||y||^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \leqslant ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||||y|| = (||x|| + ||y||)^2,$$

gdzie zastosowaliśmy nierówność Schwartza. $\diamondsuit$

Definicja 2.5 *Przestrzeń liniową z określonym iloczynem skalarnym nazywamy* **przestrzenią Hilberta** *jeżeli norma zdefiniowana z jego pomocą jest zupełna.*

Przykład 2.6. Przestrzeń l_2, zespolona lub rzeczywista, jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym zadanym przez

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\overline{y(n)}.$$

Zauważmy, że szereg definiujący $\langle x, y \rangle$ jest zbieżny, porównaj Przykład 1.11. Podobnie na $L_2[D]$ możemy określić iloczyn skalarny wzorem

$$\langle f, g \rangle = \int_D f\overline{g}\, \mathrm{d}\lambda.$$

$\diamondsuit$

Rodzi się pytanie, czy inne przestrzenie Banacha, takie jak $C[0, 2]$, l_1 itp. też są przestrzeniami Hilberta.

Twierdzenie 2.7 *Norma określona za pomocą iloczynu skalarnego spełnia następującą tożsamość równoległoboku:*

$$||x - y||^2 + ||x + y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

Dowód tej tożsamości łatwo sprawdzić z zależności pomiędzy normą i iloczynem skalaranym; w istocie zachodzi twierdzenie odwrotne: za pomocą normy z własnością równoległoboku można zdefiniować ilozyn skalarny (ale tu dowód jest znacznie bardziej skomplikowany).

Przykład 2.8. W przestrzeni l_1 rozważmy elementy $x = (1, 0, \ldots)$ oraz $y = (0, 1, 0, \ldots)$. Wtedy $||x|| = ||y|| = 1$ oraz $||x + y|| = ||x - y|| = 2$ i tożsamość równoległoboku nie jest spełniona. Podobnie sprawdzamy, że przestrzenie $C[0, 1]$, l_p dla $p \neq 2$ mają normy, które nie pochodzą od iloczynu skalarnego. $\diamondsuit$

3. Ortogonalność.

Niech X będzie ustaloną, rzeczywistą bądź zespoloną przestrzenią Hilberta. Przez analogię z przypadkiem skończenie wymiarowym możemy powiedzieć, że dla $x, y \neq 0$ wielkość

$$\frac{\langle x, y \rangle}{||x||||y||}$$

jest cosinusem kąta pomiędzy wektorami x, y. W szczególności wektory spełniające warunek $\langle x, y \rangle = 0$ nazywamy **ortogonalnymi** albo prostopadłymi. Taką zależność zapisujemy jako $x \perp y$.

Definicja 3.1 *Ciąg (skończony lub nieskończony) $x_1, x_2, \ldots$ niezerowych wektorów w przestrzeni Hilberta nazywamy*

— **ortogonalnym** *jeżeli* $x_n \perp x_k$ *dla* $n \neq k$*;*

— **ortonormalnym** *jeżeli jest ciągiem ortogonalnym i* $||x_n|| = 1$ *dla każdego* n*.*

Twierdzenie 3.2 *Jeżeli* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *jest ciągiem ortogonalnym to jest on liniowo niezależny.*

Dowód. Niech $\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$ dla pewnych skalarów $a_k \in \mathbb{F}$. Wtedy dla każdego $j \leqslant n$

$$0 = \langle \sum_{k=1}^n a_k x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_k \langle x_k, x_j \rangle = a_j ||x_j||^2,$$

a zatem $a_j = 0$ (bo $x_j \neq 0$). $\diamondsuit$

Twierdzenie 3.3 *Jeżeli* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *jest ciągiem ortogonalnym to*

$$||\sum_{k=1}^n x_k||^2 = \sum_{k=1}^n ||x_k||^2.$$

Dowód. Uwzględniając ortogonalność wektorów

$$||\sum_{k=1}^n x_k||^2 = \langle \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k \rangle = \sum_{k,j=1}^n \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, x_k \rangle = \sum_{k=1}^n ||x_k||^2.$$

$\diamondsuit$

Ostatnie twierdzenie można śmiało nazwać twierdzeniem Pitagorasa. Dość oczywistym przykładem układu ortonormalnego w $\mathbb{C}^n$ lub $\mathbb{R}^n$ jest ciąg wektorów $e_k = (0, \ldots, 1, 0 \ldots)$, gdzie 1 występuje na k–tym miejscu.

Przykład 3.4. Rozważmy zespoloną przestrzeń Hilberta $L_2[0, 2\pi]$, gdzie iloczyn skalarny dany jest wzorem

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f\overline{g}\, \mathrm{d}\lambda.$$

Niech $e_n(x) = e^{inx}$ dla wszystkich n całkowitych. Wtedy dla $k \neq n$

$$\langle e_k, e_n \rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikx}\overline{e^{inx}}\, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{i(k-n)} \left[e^{i(k-n)x}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Funkcje e_n tworzą więc układ ortogonalny. Łatwo obliczyć, że $||e_n|| = 2\pi$.

W przypadku rzeczywistej przestrzeni $L_2[0, 2\pi]$ z powyższego rachunku wynika $\boxed{?}$, że ciąg

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

jest ortogonalny. $\diamondsuit$

Przypomnijmy, że w każdej przestrzeni liniowej X możemy zdefiniować wypukłość: zbiór $C \subseteq X$ jest **wypukły** jeżeli dla dowolnych $x, y \in C$ i $t \in [0, 1]$ mamy $tx + (1 - t)y \in C$. Oczywiście zbiór wektorów postaci $tx + (1 - t)y \in C$, gdzie $t \in [0, 1]$ należy interpretować jako odcinek łączący x i y. Wypukłość oznacza więc że C zawiera każdy odcinek o końcach z C.

Twierdzenie 3.5 *Niech K będzie niepustym zbiorem wypukłym i domkniętym w przestrzeni Hilberta X. Wtedy dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden $y_0 \in K$, leżący najbliżej x.*

Dowód. Niech
$$\alpha = \inf\{||x - y|| : \ y \in K\},$$
czyli α jest odległością x od zbioru K. Z definicji kresu dolnego istnieją w zbiorze K elementy $y_1, y_2, \ldots$, takie że $||x - y_n|| \to \alpha$. Zauważmy, że

$$||\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x|| \geqslant \alpha \quad \text{czyli } ||y_n + y_m - 2x|| \geqslant 2\alpha$$

bo $(1/2)(y_n + y_m) \in K$ na mocy wypukłości. Ponadto, korzystając z tożsamości równoległoboku (patrz Twierdzenie 2.7) otrzymujemy

$$||y_n - y_m||^2 = ||y_m - x - (y_n - x)||^2 = 2||y_n - x||^2 + 2||y_m - x||^2 - ||y_n + y_m - 2x||^2 \leqslant$$
$$2||y_n - x||^2 + 2||y_m - x||^2 - 4\alpha^2 \to 0,$$

co pozwala sprawdzić, że ciąg y_n spełnia warunek Cauchy'ego. Niech y_0 będzie granicą y_n, wtedy $||y_0 - x|| = \lim ||y_n - x|| = \alpha$.

W podobny sposób sprawdzamy jedyność elementu najbliższego, ponownie wykorzystując tożsamość równoległoboku. $\diamondsuit$

Szczególnym rodzajem zbioru wypukłego jest podprzestrzeń: Y jest podprzestrzenią X jeżeli $y + y' \in Y$ i $ay \in Y$ dla $y, y' \in Y$, $a \in \mathbb{F}$. Tym samym podprzestrzeń jest sama przestrzenią liniową.

Dla ustalonych $e_1, e_2, \ldots, e_n$ możemy na przykład rozważyć **podprzestrzeń generowaną** przez te wektory, składającą się z wszystkich kombinacji liniowych postaci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k e_k.$$

Można sprawdzić, że każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń jest domknięta. Ponieważ podprzestrzeń jest oczywiście zbiorem wypukłym, można na podstawie Twierdzenia 3.5 stwierdzić, że dla każdego $x \in X$ i podprzestrzeni Y generowanej przez wektory $e_1, e_2, \ldots, e_n$ istnieje dokładnie jeden $y \in Y$ leżący najbliżej x. Obecnie znajdziemy wzór na taki element y. Piszemy $z \perp Y$ aby zaznaczyć, że $z \perp y$ dla każdego $y \in Y$; mówimy wtedy że wektor z jest prostopadły do podprzestrzeni Y.

Twierdzenie 3.6 *Niech $e_1, e_2, \ldots, e_n$ będzie układem ortonormalnym i niech Y będzie podprzestrzenią rozpiętą przez ten układ. Wtedy dla dowolnego $x \in X$ wektor*

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \in Y$$

leży najbliżej wektora x. Ponadto wektor $z = x - y$ jest prostopadły do Y.

Dowód. Sprawdzimy najpierw, że istotnie $z = x-y$ jest prostopadły do Y. Dla dowolnego $m \leqslant n$ mamy

$$\langle x-y, e_m\rangle = \langle x, e_m\rangle - \langle \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k, e_m\rangle =$$

$$= \langle x, e_m\rangle - \sum_k \langle x, e_k\rangle \cdot \langle e_k, e_m\rangle = \langle x, e_m\rangle - \langle x, e_m\rangle = 0$$

z uwagi na to, że $\langle e_k, e_m\rangle = 0$ dla $m \neq k$. Mamy więc $z \perp e_m$ dla każdego m; stąd i z liniowości iloczynu skalarlnego wynika że $z \perp u$ dla każdego $u \in Y$.

Jeżeli u jest dowolnym wektorem z Y to $u - y \in Y$ i z pierwszej części $u - y \perp z$. Dlatego

$$||x-u||^2 = ||(x-y) + (y-u)||^2 = ||x-y||^2 + ||y-u||^2 \geqslant ||x-y||^2$$

z uwagi na twierdzenie Pitagorasa i fakt że $z = x - y \perp y - u$. Stąd rzeczywiście y leży najbliżej wektora x. $\diamondsuit$

Zauważmy jeszcze, że z twierdzenia wynika rozkład $x = y + z$, gdzie $y \in Y$ i $z \perp Y$. Dlatego $\boxed{?}$ (zrób rysunek) wektor y możemy nazwać rzutem prostopadłym wektora x na podprzestrzeń Y.

Dodajmy, że rozumując jak w ostatnim dowodzie, możemy sprawdzić, że każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni Hilberta X ma bazę ortonormalną. Istotnie, dowód można przeprowadzić przez indukcję. Fakt ten jest jasny dla przestrzeni wymiaru 1. Niech Y ma bazę $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Z założenia indukcyjnego podprzestrzeń Y_0 rozpięta na wektorach $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ma bazę ortonormalną $e_1, e_2, \ldots e_{n-1}$. Teraz $y_n = y_n' + z$, gdzie $y_n' \in Y_0$ i $z \perp Y_0$. Ponieważ $y_n \notin Y_0$, $z \neq 0$ i oznaczając

$$e_n = \frac{1}{||z||} z$$

otrzymujemy bazę ortonormalną $e_1, e_2, \ldots, e_n$ przestrzeni Y. Ten proces nazywa sie procesem ortogonalizacji Gramma-Schmidta, w którym bazę wektorów liniowo niezależnych przerabiamy na bazę ortonormalną.

4. Szeregi Fouriera.

Część rozważań z poprzedniego rozdziału można przenieść na nieskończone układy ortogonalne. W każdej przestrzeni Banacha (a więc i w każdej przestrzeni Hilberta) możemy zdefiniować zbieżność szeregu

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

przez warunek zbieżności ciągu sum częściowych

$$||x - \sum_{k=1}^{n} x_k|| \to 0.$$

Wiele podstawowych własności szeregów liczbowych zbieżnych można przenieść na przypadek wektorowy (patrz lista zadań).

Twierdzenie 4.1 *Niech $e_1, e_2, \ldots$ będzie nieskończonym układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X. Wtedy dla każdego $x \in X$ zachodzi następująca nierówność Bessla*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leqslant ||x||^2.$$

Dowód. Dla ustalonego n wektor

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \in Y$$

jest rzutem na podprzestrzeń Y generowaną przez pierwsze n wektorów i $x - y \perp Y$ (patrz dowód Twierdzenia 3.6). Dlatego

$$||x||^2 = ||(x-y)+y||^2 = ||x-y||^2 + ||y||^2 \geqslant ||y||^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Stąd natychmiast otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leqslant ||x||^2.$$

$\diamondsuit$

Liczby $\langle x, e_n \rangle$ nazywamy **współczynnikami Fouriera** wektora x wzgledem ustalonej bazy ortonormalnej e_n.

Definicja 4.2 *Niech $e_1, e_2, \ldots$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X. Taki ciąg nazywamy* **bazą** *(albo układem zupełnym) jeżeli każdy $x \in X$ da się przedstawić w postaci szeregu*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

dla pewnych skalarów a_n.

Zauważmy, że jeśli $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ to

$$\langle x, e_k \rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a_n e_n, e_k \rangle = a_k.$$

Dlatego jeżeli x ma przedstawienie w bazie e_n to jest ono postaci

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Takie przedstawienie nazywamy **szeregiem Fouriera** wektora x.

Przykład 4.3. Jeżeli l_2 jest rzeczywistą lub zespoloną przestrzenią ciągów sumowalnych z kwadratem to przyjmując że e_n jest wektorem mającym 1 na n–tym miejscu i zera na pozostałych otrzymujemy oczywiście układ ortonormalny w tej przestrzeni; przypomnijmy, że iloczyn skalarny jest tu dany wzorem

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\overline{y(n)}.$$

Oczywiście e_n tworzą bazę l_2 gdyż

$$x = (x(1), x(2), \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n$$

co wynika z faktu, że $\sum_n |x(n)|^2 < \infty$. Istotnie, odejmując od x sumę częściową szeregu otrzymujemy

$$||x - \sum_{n=1}^{N} x(n)e_n||^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |x(n)|^2 \to 0,$$

gdyż "ogon" szeregu zbieżnego dąży do zera. $\diamondsuit$

Rozważmy ponownie zespoloną przestrzeń Hilberta $L_2[0, 2\pi]$, z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f\overline{g}\, \mathrm{d}\lambda,$$

porównaj Przykład 3.4. Wiemy już, że układ

$$e_n(x) = \frac{1}{2\pi}e^{inx}, n = 0, 1, -1, 2, \dots$$

jest ortonormalny (obecnie dopisaliśmy stałą, aby norma była równa 1). Posługując się Twierdzeniem Stone'a–Weierstrassa dowodzi się następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.4 *Układ e_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ stanowi bazę zespolonej przestrzeni Hilberta $L_2[0, 2\pi]$ i dlatego dla dowolnej $f \in L_2[0, 2\pi]$*

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n,$$

gdzie współczynniki c_n są dane wzorami

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Należy zauważyć, że przedstawienie funkcji f w bazie oznacza, że dany szereg jest zbieżny w normie przestrzeni $L_2[0, 2\pi]$, co niekoniecznie oznacza, że

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

dka każdego x; porównaj twierdzenie poniżej.

Analogiczny fakt zachodzi też dla rzeczywistej przestrzeni $L_2[0, 2\pi]$.

Twierdzenie 4.5 *Układ*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

stanowi bazę ortogonalną rzeczywistej przestrzeni Hilberta $L_2[0, 2\pi]$ *i dlatego dla dowolnej* $f \in L_2[0, 2\pi]$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie współczynniki $a_0, a_1, \ldots b_1, b_2, \ldots$ *dane są wzorami*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}\lambda(x), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Zauważmy, że wyraz stały w szeregu jest napisany jako $1/2a_0$, aby wzór na a_n obowiązywał także dla $n = 0$. Tutaj znowu mowa o przedstawieniu funkcji za pomocą szeregu zbieżnego w normie $L_2[0, 2\pi]$ (we wzorze piszemy $f(x)$ itd. aby móc zapisać funkcje cos i sin). Dla funkcji ciągłej zachodzi jednak następujące klasyczne twierdzenie.

Twierdzenie 4.6 *Jeżeli* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą i* $f(0) = f(2\pi)$ *to dla każdego* $x \in [0, 2\pi]$ *zachodzi wzór*

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie współczynniki a_n, b_n *dane są wzorami z Twierdzenia 4.5*