Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

**Grzegorz Plebanek**

# Miara i całka

**skrypt do wykładu, czyli wszystko o**

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu$$



wersja Θ.1 (2020)

# Spis treści

# Rozdział 0

# Wiadomości wstępne

*Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.*
John von Neumann

## 0.1 O czym i dla kogo jest ten tekst?

Niniejszy skrypt zawiera podstawowy wykład z teorii miary i całki i obejmuje materiał, który w Instytucie Matematycznym UWr jest wykładany w trakcie semestralnego wykładu, noszącego obecnie taką nazwę, jak tytuł skryptu (poprzednio obowiązywała tradycyjna nazwa *Funkcje rzeczywiste*). Skrypt winien być dostępny dla każdego studenta II roku matematyki bądź informatyki — do zrozumienia większości zagadnień wystarcza dobra znajomość rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej oraz teorii mnogości w zakresie podstawowym. W miejscach, gdzie potrzebna jest głębsza znajomość zagadnień teoriomnogościowych, czytelnik zostanie każdorazowo ostrzeżony. Skrypt pisany jest z myślą o studentach, którzy nie słuchali jeszcze wykładu z topologii — niezbędne elementy topologii przestrzeni metrycznych będą wprowadzane w miarę potrzeb.

Jest wiele książek w języku angielskim i kilka po polsku, traktujących o podstawach teorii miary i całki; poniżej wymieniam jedynie te, do których zaglądałem w trakcie pisania skryptu:


[**1**] P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa (1987).

[**2**] P. Halmos, *Measure theory*, Springer, New York (1974).

[**3**] D.H. Fremlin, *Measure theory vol. 1: The Irreducible minimum*, Torres Fremlin, Colchester (2000).

[**4**] D.H. Fremlin, *Measure theory vol. 2: Broad foundations*, Torres Fremlin, Colchester (2000).

[**5**] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa (1976).


Prezentowane w skrypcie podejście do wprowadzenia miary i całki jest jak najbardziej standardowe i unika eksperymentów formalnych. Dlatego wiele koncepcji zostało wprost zaczerpniętych z klasycznej książki Halmosa, a wiele dowodów korzysta z eleganckiego podejścia, zaprezentowanego przez podręcznik Billingsley'a. Mam jednak nadzieję, że poniższy wykład, dzięki stosownemu wyborowi zagadnień i sposobowi prezentacji będzie przydatny i, do pewnego stopnia, oryginalny. W moim przeświadczeniu skrypt zawiera zagadnienia, które winien dobrze opanować każdy *dobry* student matematyki, niezależnie od tego, jaka będzie droga jego specjalizacji na wyższych latach studiów.

Każdy rozdział kończy lista zadań oraz lista problemów. Zadania mają stanowić integralną część wykładu, komentować twierdzenia, dostarczać przykładów, zachęcać do przeprowadzania samodzielnych rozumowań. Problemy to zagadnienia, które albo (czasami tylko chwilowym) stopniem trudności, albo też tematyką wykraczają poza poziom podstawowy wykładu; w każdym razie problemy można pominąć *przy pierwszej lekturze*. Niektóre problemy wymagają znajomości indukcji pozaskończonej; w innych przypadkach rozróżnienie pomiędzy problemem a zadaniem jest czysto umowne. Wiele zadań należy do klasyki przedmiotu i można je znaleźć w cytowanych podręcznikach. Inne powstały w wyniku moich własnych doświadczeń z uczeniem studentów matematyki we Wrocławiu bądź zostały zaczerpnięte z internetu, w szczególności z forum dyskusyjnego Ask an Analyst, które było prowadzone na portalu Topology Atlas[1]

## 0.2 Trochę teorii mnogości

Będziemy najczęściej prowadzić rozważania, dotyczące podzbiorów jakieś ustalonej przestrzeni $X$; rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru $X$ nazywamy zbiorem potęgowym i oznaczamy zazwyczaj przez $\mathcal{P}(X)$. Oprócz zwykłych operacji $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, określonych dla $A, B \subseteq X$, możemy mówić o *dopełnieniu* $A^c = X \setminus A$ zbioru $A$. Przypomnijmy, że operacja *różnicy symetrycznej* zbiorów jest określona jako

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Podstawowymi będą dla nas operacje mnogościowe wykonywane na ciągach zbiorów. Jeśli dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ wybraliśmy pewien podzbiór $A_n$ przestrzeni $X$ to $(A_n)_n$ nazwiemy ciągiem podzbiorów $X$ i dla takiego ciągu definiujemy przekrój $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ i sumę $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ przez warunki

$$x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy } x \in A_n \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N};$$

$$x \in \bigcup_{n=1}^\infty A_n \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy istnieje } n \in \mathbb{N} \text{ takie że } x \in A_n.$$

[1] patrz http://at.yorku.ca/topology/ — ten link już nie działa

**Przykład 0.2.1** Rozważając podzbiory postaci $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ możemy napisać

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n) = \emptyset, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/n, n) = (0, \infty),$$

co jest oczywiste, nieprawdaż?[2] ♢

Oczywiście umiejętność formalnego zapisania tego typu definicji za pomocą kwantyfikatorów (oraz ich zrozumienia) jest jak najbardziej pożądana, ale warto zwrócić uwagę na to, że ścisłość i precyzja matematyczna nie kłóci się z użyciem języka potocznego.

**Lemat 0.2.2** *Dla dowolnego ciągu zbiorów $A_n$ w ustalonej przestrzeni $X$ zachodzą prawa de Morgana*

$$(i) \quad \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c, \qquad (ii) \quad \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

*Dowód.* Aby udowodnić wzór (i) zauważmy, że $x \in (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c$ wtedy i tylko wtedy gdy $x$ nie należy do zbioru $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, co jest równoważne temu, że $x \notin A_k$ dla pewnego $k$, a to jest tożsame ze stwierdzeniem, że $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$.

Wzór (ii) można wyprowadzić z (i) i oczywistej zależności $(A^c)^c = A$:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left[ \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \right]^c = \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^c)^c \right]^c = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c.$$

♢

Podamy teraz pewne definicje i oznaczenia, które będą bardzo przydatne w dalszym ciągu. Niech $(A_n)_n$ będzie ciągiem zbiorów w ustalonej przestrzeni $X$. Taki ciąg nazywamy *rosnącym* jeśli $A_n \subseteq A_{n+1}$ dla każdego $n$; analogicznie ciąg jest *malejący* gdy $A_n \supseteq A_{n+1}$ dla wszystkich $n$. Będziemy pisać

$$A_n \uparrow A \text{ aby zaznaczyć, że ciąg } (A_n)_n \text{ jest rosnący i } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$A_n \downarrow A \text{ aby zaznaczyć, że ciąg } (A_n)_n \text{ jest malejący i } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Tego typu zbieżność zbiorów może być uogólniona w sposób następujący.

[2] *oczywistość* jest kategorią psychologiczną; w praktyce matematycznej umawiamy się, że każdy fakt oczywisty ma swój dowód i będzie okazany na żądanie oponenta bądź egzaminatora

**Definicja 0.2.3** *Dla ciągu zbiorów* $(A_n)_n$ *zbiory*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

*nazywamy, odpowiednio,* granicą górną *i* granicą dolną *ciągu* $(A_n)_n$.

*Mówimy, że ciąg* $(A_n)_n$ *jest zbieżny do zbioru* $A$*, pisząc* $A = \lim_n A_n$*, gdy*

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

Innym ważnym pojęciem jest przeliczalność zbiorów. Przypomnijmy, że dwa zbiory $X$ i $Y$ są *równoliczne* jeżeli istnieje bijekcja $f : X \to Y$ (czyli funkcja wzajemnie jednoznaczna), odwzorowująca $X$ na $Y$. Zbiór $X$ nazywamy *przeliczalnym* jeżeli $X$ jest skończony lub też $X$ jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Inaczej mówiąc zbiór jest przeliczalny jeżeli jest równoliczny z pewnym podzbiorem $\mathbb{N}$. Najbardziej intuicyjnym wyrażeniem przeliczalności będzie następująca uwaga: niepusty zbiór przeliczalny $X$ można zapisać w postaci $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (*wyliczyć wszystkie jego elementy*; tutaj nie zakładamy, że $x_n$ są parami różne). Przypomnijmy sobie następujące własności zbiorów przeliczalnych (dowód poniżej jest ledwie naszkicowany).

**Twierdzenie 0.2.4**

*(i) Zbiór* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *jest przeliczalny.*

*(ii) Jeśli zbiory* $X$ *i* $Y$ *są przeliczalne to zbiory* $X \cup Y$ *i* $X \times Y$ *też są przeliczalne.*

*(iii) Jeśli zbiory* $X_1, X_2, \ldots$ *są przeliczalne to zbiór* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ *jest przeliczalny*[3].

*(iv) Zbiór liczb wymiernych* $\mathbb{Q}$ *jest przeliczalny.*

*(v) Zbiór* $\{(p,q) : p < q, p, q \in \mathbb{Q}\}$ *(wszystkich przedziałów na prostej o końcach wymiernych) jest przeliczalny.*

*(vi) Ani zbiór liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$*, ani też żaden jego niepusty przedział* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ *nie jest przeliczalny.*

*Dowód.* Dowód (i) wynika stąd, że ciąg

$$\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \ldots$$

w którym wyliczamy wszystkie pary o sumie 2, następnie wszystkie pary o sumie 3 itd., zawiera wszystkie elementy zbioru $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

W części (ii) dowód przeliczalności $X \cup Y$ zostawiamy czytelnikowi, natomiast przeliczalność $X \times Y$ wynika łatwo z (i).

W (iii) na mocy założenia możemy napisać $X_n = \{x_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ dla każdego $n$. W ten sposób otrzymamy zbiór $X = \{x_k^n : n, k \in \mathbb{N}\}$ ponumerowany za pomocą $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a to na mocy (i) uzasadnia jego przeliczalność.

[3] dla wielbicieli teorii ZF: ten fakt wymaga pewnika wyboru

Przeliczalność $\mathbb{Q}$ wynika łatwo z (i) i pierwszej części (ii). Z wielu różnych sposobów wykazania nieprzeliczalności $\mathbb{R}$ wspomnimy następujący: niech $x_n$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych; wykażemy, że $\mathbb{R} \neq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wybierzmy dowolne liczby $a_1 < b_1$, takie że przedział $[a_1, b_1]$ nie zawiera liczby $x_1$. Zauważmy, że istnieją liczby $a_2, b_2$ takie że $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ i $x_2 \notin [a_2, b_2]$. Postępując analogicznie zdefiniujemy zstępujący ciąg niezdegenerowanych przedziałów $[a_n, b_n]$ tak że $x_1, x_2, \ldots, x_n \notin [a_n, b_n]$. Rzecz w tym, że istnieje liczba $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ — na mocy aksjomatu Dedekinda można przyjąć $y = \sup_n a_n$. Ostatecznie $y \neq x_n$ dla każdego $n$ i to kończy dowód. Łatwo ten argument zmodyfikować, aby pokazać że żaden niepusty przedział $(a, b)$ na prostej nie jest przeliczalny. $\diamondsuit$

Tradycyjnie moc zbioru $\mathbb{R}$ oznaczana jest przez $\mathfrak{c}$ i nosi nazwę *continuum*. W teorii mnogości dowodzi się, że rodzina $P(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ jest równoliczna z $\mathbb{R}$, czyli że $P(\mathbb{N})$ też jest mocy $\mathfrak{c}$.

## 0.3 Odrobina topologii

W tym miejscu wprowadzimy podstawowe pojęcia topologiczne na prostej rzeczywistej. Przypomnijmy, że o zbiorze $\mathbb{R}$, oprócz zwykłych aksjomatów opisujących własności działań $+$ i $\cdot$ oraz własności porządku, zakładamy następujący aksjomat Dedekinda: *Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ ma najmniejsze ograniczenie górne* (które oznaczamy $\sup A$).

**Definicja 0.3.1** *Zbiór $U \subseteq \mathbb{R}$ jest* otwarty *jeżeli dla każdego $x \in U$ istnieje liczba $\delta$, taka że $(x - \delta, x + \delta) \subseteq U$.*

*Zbiór $F \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy* domkniętym *jeśli zbiór $\mathbb{R} \setminus F$ jest otwarty, to znaczy jeśli dla każdego $x \notin F$ istnieje $\delta > 0$, taka że $(x - \delta, x + \delta) \cap F = \emptyset$.*

**Przykład 0.3.2** Jest rzeczą oczywistą, ale godną odnotowania, że zbiory $\emptyset$ i $\mathbb{R}$ są otwarte, a więc są także domknięte. Dowolny przedział postaci $(a, b)$ jest otwartym podzbiorem prostej; istotnie, jeśli $x \in (a, b)$ to wystarczy przyjąć $\delta = \min\{x-a, b-x\}$. Z podobnych powodów otwartymi są półproste postaci $(a, \infty)$, $(-\infty, b)$.

Przedział postaci $[a, b]$ jest domkniętym zbiorem w sensie powyższej definicji, dlatego że $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ jest zbiorem otwartym. Tym samym terminy 'otwarty' i 'domknięty' rozszerzają potoczne określenia stosowane dla przedziałów.

Przedział postaci $[a, b)$ dla $a < b$ nie jest ani otwarty, jako że nie spełnia definicji otwartości dla $x = a$, ani też domknięty. $\diamondsuit$

Nietrudno wywnioskować z definicji, że zbiór jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest sumą pewnej rodziny przedziałów. W istocie mamy następujące

**Twierdzenie 0.3.3** *Każdy niepusty zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}$ jest postaci*

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

*dla pewnych liczb wymiernych $a_n, b_n$.*

*Dowód.* Dla każdego $x \in U$ istnieje $\delta > 0$, taka że $(x-\delta, x+\delta) \subseteq U$. Korzystając z gęstości zbioru $\mathbb{Q}$ możemy znaleźć $a_x, b_x \in \mathbb{Q}$, takie że $x - \delta < a_x < x < b_x < x + \delta$, a wtedy $x \in (a_x, b_x) \subseteq U$. W ten sposób zdefiniowaliśmy rodzinę przedziałów $\{(a_x, b_x) : x \in U\}$ o końcach wymiernych. Rodzina ta jest przeliczalna na mocy Twierdzenia 0.2.4(v); jeśli $(p_n, q_n)$ jest numeracją wszystkich elementów tej rodziny to otrzymamy $U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(p_n, q_n)$, ponieważ dla dowolnego $x \in U$ mamy $x \in (a_x, b_x) = (p_n, q_n)$ dla pewnego $n$. $\diamondsuit$

Nieco inną metodą można wykazać następującą wersję Twierdzenia 0.3.3: *każdy otwarty podzbiór $\mathbb{R}$ jest przeliczalną sumą przedziałów parami rozłącznych*, patrz Zadanie 0.4.11.

Na koniec wspomnimy jeszcze o specjalnej własności odcinków domkniętych, która w topologii jest nazywana zwartością.

**Twierdzenie 0.3.4** *Jeżeli $[a, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ to istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$.*

*Dowód.* Niech $S$ będzie zbiorem tych liczb $s \in [a, b]$, dla których odcinek $[a, s]$ pokrywa się skończoną ilością przedziałów $(a_n, b_n)$. Wtedy $S \neq \emptyset$ ponieważ $a \in S$. Zbiór $S$ jako niepusty i ograniczony z góry podzbiór prostej ma kres górny, niech $t = \sup S$. Wtedy $t \in [a, b]$ więc $t \in (a_i, b_i)$ dla pewnego $i$. Ponieważ $a_i < t$ więc istnieje $s \in S$, taki że $a_i < s < t$. Oznacza to, że odcinek $[a, s]$ pokrywa się skończoną ilością przedziałów $(a_n, b_n)$, a zatem również odcinek $[a, t]$ ma taką samą własność – wystarczy do poprzedniego pokrycia skończonego dołączyć $(a_i, b_i)$. W ten sposób sprawdziliśmy, że $t \in S$. Gdyby $t < b$ to biorąc $s$ takie że $t < s < b_i$ otrzymalibyśmy $s \in S$ z powodu jak wyżej, a to jest sprzeczne z definicją kresu górnego. Tym samym $t = b$ i to właśnie należało wykazać. $\diamondsuit$

**Wniosek 0.3.5** *Niech $F$ będzie domkniętym i ograniczonym podzbiorem prostej. Jeżeli $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ to istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$.*

*Dowód.* Mamy $F \subseteq [a, b]$ dla pewnych $a, b$, jako że $F$ jest zbiorem ograniczonym. Ponadto $\mathbb{R} \setminus F$ jest zbiorem otwartym więc $\mathbb{R} \setminus F = \bigcup_n (p_n, q_n)$ dla pewnych $(p_n, q_n)$, patrz Twierdzenie 0.3.3. Teraz wystarczy zastosować Twierdzenie 0.3.4 do pokrycia odcinka $[a, b]$ odcinkami $(a_n, b_n)$ i $(p_n, q_n)$. $\diamondsuit$

Mówiąc w języku topologii każdy domknięty i ograniczony podzbiór $\mathbb{R}$ jest zwarty. Zwartość można wysłowić też w języku ciągów – patrz Problem 0.5.D.

## 0.4 Zadania

**0.4.1** Obliczyć

*(i)* $\bigcap_{n=1}^\infty (0,1/n)$; $\bigcap_{n=1}^\infty (-1/n,1/n)$; $\bigcup_{n=1}^\infty [1/n,n)$;

*(ii)* $\bigcap_{n=1}^\infty (n,n+3)$; $\bigcup_{n=1}^\infty (n,n+3)$;

*(iii)* $\bigcap_{n=1}^\infty (n,2n)$; $\bigcup_{n=1}^\infty (n-n^2,1/n)$.

**0.4.2** Dla ciągów zbiorów $A_n$ z poprzedniego zadania obliczyć $\limsup_n A_n$ i $\liminf_n A_n$.

**0.4.3** Zapisać przedział domknięty postaci $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ jako przekrój ciągu przedziałów otwartych. Podobnie zapisać przedział otwarty $(a,b)$ jako sumę przedziałów domkniętych.

**0.4.4** Wykazać, że w powyższym zadaniu nie można zamienić miejscami określeń 'otwarty' i 'domknięty'.

**0.4.5** Zapisać trójkąt $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$ jako sumę prostokątów. Zauważyć, że wystarczy wysumować przeliczalnie wiele prostokątów, aby taki trójkąt uzyskać.

**0.4.6** Zauważyć, że $x \in \limsup_n A_n$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \in A_n$ dla nieskończenie wielu $n$; podobnie $x \in \liminf_n A_n \iff x \in A_n$ dla prawie wszystkich $n$.

**0.4.7** Uzasadnić następujące zależności

*(i)* $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \subseteq \liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$;

*(ii)* $(\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c$, $(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n A_n^c$;

*(iii)* $\liminf_n (A_n \cap B_n) = \liminf_n A_n \cap \liminf_n B_n$;

*(iv)* $\liminf_n (A_n \cup B_n) \supseteq \liminf_n A_n \cup \liminf_n B_n$ i równość na ogół nie zachodzi.

Zapisać zależności dla granicy górnej lim sup, analogiczne do (iii)–(iv).

**0.4.8** Sprawdzić, że dla danego ciągu zbiorów $A_n$, przyjmując $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{j<n} A_j$ dla $n > 1$, otrzymujemy $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$, przy czym zbiory $B_n$ są parami rozłączne.

**0.4.9** Udowodnić, że $\lim_n A_n = A \iff \lim_n (A_n \triangle A) = \emptyset$.

**0.4.10** Wykazać, że każda rodzina parami rozłącznych przedziałów na prostej jest przeliczalna.

**0.4.11** Niech $U \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym. Dla $x,y \in U$ definiujemy $x \sim y$ jeśli istnieje przedział $(a,b)$, taki że $x,y \in (a,b) \subseteq U$. Sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności, a jej klasy abstrakcji są przedziałami otwartymi. Wywnioskować stąd i z zadania poprzedniego, że każdy otwarty podzbiór prostej jest sumą ciągu parami rozłącznych przedziałów.

**0.4.12** Sprawdzić, że przekrój skończonej ilości zbiorów otwartych jest otwarty.

## 0.5 Problemy

**0.5.A** Udowodnić następujący "warunek Cauchy'ego": ciąg zbiorów $A_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych ciągów liczb naturalnych $(n_i)_i$, $(k_i)_i$ rozbieżnych do nieskończoności mamy $\bigcap_{i=1}^{\infty}(A_{n_i} \triangle A_{k_i}) = \emptyset$.

**0.5.B** Udowodnić, że dowolny ciąg zbiorów $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ma podciąg zbieżny.

**0.5.C** Podać przykład ciągu $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, który nie ma podciągu zbieżnego. Uwaga: może być trudne; lepiej zastąpić $\mathbb{R}$ innym zbiorem tej samej mocy.

**0.5.D** Udowodnić, że jeśli $F$ jest domkniętym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}$ to dla każdego ciągu $x_n \in F$ istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do pewnego $x \in F$.

Wskazówka: Aby $x \in F$ był granicą pewnego podciągu $x_n$ potrzeba i wystarcza by dla każdego $\delta > 0$ w $(x - \delta, x + \delta)$ znajdowało się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $x_n$. Przyjąć, że żaden $x \in F$ nie ma tej własności i zastosować Twierdzenie 0.3.5.

# Rozdział 1

# Rodziny zbiorów i miary

*$\pi\alpha\nu\tau\omega\nu$ $\chi\rho\eta\mu\alpha\tau\omega\nu$ $\mu\eta\tau\rho\omega\nu$ $\alpha\nu\tau\theta\rho\omega\pi\omega\sigma$*
*Człowiek jest miarą wszechrzeczy (istniejących, że istnieją i nieistniejących, że nie istnieją).*
Protagoras z Abdery

W rozdziale tym wprowadzimy podstawowe pojęcia teorii miary, a następnie udowodnimy twierdzenie, pozwalające konstruować miary z funkcji zbioru określonych na pierścieniach. Konstrukcja ta będzie zilustrowana wprowadzeniem miary Lebesgue'a na prostej rzeczywistej.

## 1.1 Rodziny zbiorów

W tym podrozdziale, jak i w wielu następnych, będziemy rozważać rodziny podzbiorów ustalonej niepustej przestrzeni $X$; przypomnijmy, że $\mathcal{P}(X)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów $X$.

**Definicja 1.1.1** *Mówimy, że rodzina $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ jest* pierścieniem zbiorów *jeżeli*

*(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$;*

*(ii) jeżeli $A, B \in \mathcal{R}$ to $A \cup B$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$.*

*Rodzina $\mathcal{R}$ jest* ciałem zbiorów *jeżeli $\mathcal{R}$ jest pierścieniem zbiorów oraz $X \in \mathcal{R}$.*

Powyższa terminologia nawiązuje nieco do pojęć algebraicznych (pierścienie i ciała w algebrze to struktury, w których wykonalne są pewne działania), ta analogia jest nieco powierzchowna (ale patrz Zadanie 1.10.1). Ponieważ nie będzie to prowadzić do nieporozumień, w dalszym ciągu będziemy po prostu mówić, że dana rodzina $\mathcal{R}$ jest pierścieniem lub ciałem.

Zauważmy, że w pierścieniu $\mathcal{R}$ możemy wykonywać operacje różnicy symetrycznej i przekroju; istotnie, jeżeli $A, B \in \mathcal{R}$ to $A \triangle B \in \mathcal{R}$, co wynika bezpośrednio z aksjomatu (ii) w Definicji 1.1.1; ponadto $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$. Zauważmy też, że na to, aby rodzina $\mathcal{R}$ była ciałem potrzeba i wystarcza żeby $\emptyset \in \mathcal{R}$ oraz $A \cup B, A^c \in \mathcal{R}$ dla dowolnych $A, B \in \mathcal{R}$. Dostateczność tych warunków wynika z tożsamości $X = \emptyset^c$ oraz

$$A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c.$$

Jeżeli dana rodzina zbiorów $\mathcal{R}$ jest zamknięta na sumy dwóch swoich elementów to prosta indukcja pokaże, że $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{R}$ dla dowolnego $n$ i $A_i \in \mathcal{R}$. Możemy więc powiedzieć, że ciało zbiorów to rodzina zamknięta na wszystkie skończone operacje mnogościowe.

**Definicja 1.1.2** *Mówimy, że rodzina* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *jest* $\sigma$–pierścieniem zbiorów *jeżeli* $\mathcal{R}$ *jest pierścieniem zamkniętym na przeliczalne sumy, to znaczy spełniającym warunek* $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{R}$ *dla dowolnego ciągu* $A_n \in \mathcal{R}$.

*Jeżeli* $\mathcal{R}$ *jest* $\sigma$*–pierścieniem i* $X \in \mathcal{R}$ *to* $\mathcal{R}$ *nazywamy* $\sigma$–ciałem.

Zauważmy, że w $\sigma$–ciele $\mathcal{R}$ wykonywalne są wszystkie przeliczalne operacje mnogościowe, na przykład jeżeli $A_n \in \mathcal{R}$ to $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{R}$ na mocy Lematu 0.2.2, oraz

$$\limsup_n A_n, \liminf_n A_n \in \mathcal{R},$$

jako że rodzina $\mathcal{R}$ jest zamknięta na przeliczalne sumy i przekroje.

**Przykład 1.1.3** Rodzina $\mathcal{R} = \{\emptyset\}$ jest oczywiście pierścieniem, a rodzina $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ jest najmniejszym ciałem podzbiorów $X$. Zauważmy, że zbiór potęgowy $\mathcal{P}(X)$ jest $\sigma$–ciałem.

Jeśli oznaczymy przez $\mathcal{R}$ rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów nieskończonej przestrzeni $X$ to $\mathcal{R}$ jest pierścieniem, ale nie jest ciałem. Zauważmy też, że taka rodzina nie jest $\sigma$–pierścieniem bo, skoro $X$ jest nieskończonym zbiorem, to w $X$ można wyróżnić ciąg $x_n$ parami różnych jego elementów. Przyjmując $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ oraz $A_n = \{x_n\}$ mamy $A_n \in \mathcal{R}$ ale $A \notin \mathcal{R}$.

Analogicznie w nieprzeliczalnej przestrzeni $X$ rodzina $\mathcal{C}$ wszystkich podzbiorów przeliczalnych stanowi naturalny przykład $\sigma$–pierścienia, który nie jest $\sigma$–ciałem. $\diamondsuit$

Podamy teraz mniej banalny i ważny przykład pierścienia podzbiorów $\mathbb{R}$.

**Lemat 1.1.4** *Rodzina* $\mathcal{R}$ *tych zbiorów* $A \subseteq \mathbb{R}$*, które można, dla pewnych* $n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$*, zapisać w postaci*

$$(*) \quad A = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i),$$

*jest pierścieniem podzbiorów prostej rzeczywistej. Każdy* $A \in \mathcal{R}$ *ma takie przedstawienie (*), w którym odcinki* $[a_i, b_i)$ *są parami rozłączne.*

*Dowód.* Mamy $\emptyset = [0,0) \in \mathcal{R}$; z samej postaci formuły (*) wynika, że rodzina $\mathcal{R}$ jest zamknięta na skończone sumy. Zauważmy, że zbiór $[a,b) \setminus [c,d)$ jest albo pusty, albo odcinkiem postaci $[x,y)$, albo też, w przypadku gdy $a < c < d < b$, jest zbiorem $[a,c) \cup [d,b) \in \mathcal{R}$. Korzystając z tej uwagi łatwo jest przez indukcję sprawdzić, że $[a,b) \setminus A \in \mathcal{R}$ dla zbioru $A$ jak w (*). Stąd z kolei wynika, że $\mathcal{R}$ jest zamknięta na odejmowanie zbiorów.

Sprawdzenie końcowego stwierdzenia pozostawiamy czytelnikowi (patrz też Zadanie 1.10.20). $\diamondsuit$

Na ogół trudno jest opisywać w konkretny sposób rodziny które są zamknięte na przeliczalne operacje — zamiast tego wygodniej jest mówić o generowaniu danego $\sigma$–pierścienia lub $\sigma$–ciała przez jakąś wyróżnioną rodzinę zbiorów. Zauważmy, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ istnieje najmniejszy pierścień $\mathcal{R}_0$ zawierający $\mathcal{F}$; $\mathcal{R}_0$ jest po prostu przekrojem wszystkich możliwych pierścieni $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{F}$ (por. Zadanie 1.10.3). Ta uwaga odnosi się też do ciał i $\sigma$–ciał.

**Definicja 1.1.5** *Dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ przyjmiemy oznaczenia*

$r(\mathcal{F})$ — *pierścień generowany przez rodzinę $\mathcal{F}$ (**R**ing);*

$s(\mathcal{F})$ — *$\sigma$–pierścień generowany przez rodzinę $\mathcal{F}$ (**S**igma ring);*

$a(\mathcal{F})$ — *ciało generowane przez rodzinę $\mathcal{F}$ (**A**lgebra);*

$\sigma(\mathcal{F})$ — *$\sigma$–ciało generowane przez rodzinę $\mathcal{F}$ ($\sigma$–algebra).*

W nawiasach podano wyjaśnienie wybranych liter — w terminologii angielskiej często ciało = *field* nazywa się też algebrą = *algebra*. Oznaczenia te będą stosowane tylko w bieżącym rozdziale. Wyjątkiem jest oznaczenie $\sigma(\cdot)$, które warto zapamiętać bo jego rola jest dużo poważniejsza.

Zauważmy, że pierścień przedziałów $\mathcal{R}$ z Lematu 1.1.4 jest generowany przez rodzinę $\mathcal{F} = \{[a,b) : a < b\}$, natomiast $\sigma$-pierścień zbiorów przeliczalnych z Przykładu 1.1 jest generowany przez rodzinę wszystkich singletonów $\{x\}$ dla $x \in X$ (inne przykłady generowania znajdują się w zadaniach). Generowanie pierścieni czy ciał można porównać do sytuacji, gdy w danej przestrzeni liniowej mówimy o podprzestrzeni generowanej przez wybrany układ wektorów lub w ustalonej grupie — o podgrupie generowanej przez pewien jej podzbiór.

**Definicja 1.1.6** *Najmniejsze $\sigma$–ciało zawierające rodzinę $\mathcal{U}$ wszystkich otwartych podzbiorów $\mathbb{R}$ oznaczamy $Bor(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{U})$ i nazywamy* $\sigma$-ciałem zbiorów borelowskich.

Powyższa definicja uogólnia się w oczywisty sposób na inne przestrzenie euklidesowe oraz przestrzenie metryczne. W przypadku prostej rzeczywistej warto odnotować bardziej “konkretne” rodziny generatorów zbiorów borelowskich — patrz lemat poniżej oraz Zadanie 1.10.9.

**Lemat 1.1.7** *Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną przedziałów postaci $[p,q)$ gdzie $p,q \in \mathbb{Q}$. Wtedy $\sigma(\mathcal{F}) = Bor(\mathbb{R})$.*

*Dowód.* Ponieważ $[p,q) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(p-1/n,q)$ więc $[p,q)$, jako przekrój przeliczalnie wielu zbiorów otwartych, jest elementem $Bor(\mathbb{R})$. Stąd $\mathcal{F} \subseteq Bor(\mathbb{R})$ i tym samym $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq Bor(\mathbb{R})$.

Z drugiej strony dla dowolnych $a<b$ możemy napisać $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[p_n,q_n) \in \sigma(\mathcal{F})$, gdzie $p_n, q_n$ są odpowiednio dobranymi ciągami liczb wymiernych. Stąd i z Twierdzenia 0.3.3 wynika, że dowolny zbiór otwarty $U$ jest elementem $\sigma(\mathcal{F})$, a zatem $Bor(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. $\diamondsuit$

O zbiorze borelowskim $B \in Bor(\mathbb{R})$ można myśleć jako o takim zbiorze, który można zapisać za pomocą przedziałów oraz przeliczalnych operacji mnogościowych. Mówiąc poglądowo każdy zbiór, który "można zapisać wzorem" jest borelowski i w znacznej części rozważań matematycznych występują tylko zbiory borelowskie. W istocie wskazanie zbioru spoza $Bor(\mathbb{R})$, a raczej udowodnienie, że istnieją nieborelowskie podzbiory prostej, wymaga pewnego wysiłku — patrz Problem 1.11.C.

## 1.2 Addytywne funkcje zbioru

Dla ustalonej rodziny $\mathcal{R}$ funkcję $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją zbioru (aby wyraźnie zaznaczyć, że argumenty tej funkcji mają inną naturę niż zmienne rzeczywiste). Tradycyjnie funkcje zbioru oznaczane są literami alfabetu greckiego. Naturanym jest zakładać, że funkcja zbioru może także przyjmować wartość $\infty$, czyli rozważać funkcje zbioru

$$\mathcal{R} \to \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} = [0,\infty];$$

o symbolu nieskończoności zakładamy na razie tylko tyle, że $x < \infty$ i $x + \infty = \infty$ dla $x \in \mathbb{R}$.

**Definicja 1.2.1** *Niech $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ będzie pierścieniem zbiorów. Funkcję $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ nazywamy* addytywną funkcją zbioru *(albo* miarą skończenie addytywną*) jeżeli*

*(i)* $\mu(\emptyset) = 0$;

*(ii) jeśli $A, B \in \mathcal{R}$ i $A \cap B = \emptyset$ to $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

Zauważmy, że jeśli istnieje $A \in \mathcal{R}$, dla którego $\mu(A) < \infty$ to

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset), \text{ więc } \mu(\emptyset) = 0.$$

Innymi słowy warunek (i) w definicji jest potrzebny tylko po to, aby wykluczyć przypadek funkcji stale równej $\infty$. Warunek skończonej addytywności (ii) ma następujące konsekwencje.

**Lemat 1.2.2** *Niech $\mu$ będzie addytywną funkcją na pierścieniu $\mathcal{R}$ i niech $A, B, A_i \in \mathcal{R}$.*

*(a) Jeżeli $A \subseteq B$ to $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*

*(b) Jeżeli* $A \subseteq B$ *i* $\mu(A) < \infty$ *to* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

*(c) Jeżeli zbiory* $A_1, \ldots, A_n$ *są parami rozłączne to* $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

*Dowód.* Ponieważ $B = A \cup (B \setminus A)$ dla zbiorów $A \subseteq B$, więc $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Stąd wynika (a), jako że $\mu(B \setminus A) \geqslant 0$ oraz (b).

Część (c) dowodzi się przez łatwą indukcję. ♢

**Definicja 1.2.3** *Jeśli* $\mu$ *jest addytywną funkcją na pierścieniu* $\mathcal{R}$ *to mówimy że* $\mu$ *jest* przeliczalnie addytywną funkcją zbioru, *jeżeli dla dowolnych* $R \in \mathcal{R}$ *i parami rozłącznych* $A_n \in \mathcal{R}$, *takich że* $R = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ *zachodzi wzór*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

W powyższej definicji musimy założyć, że nieskończona suma zbiorów jest elementem $\mathcal{R}$, jako że rodzina $\mathcal{R}$ jest z założenia jedynie pierścieniem. Odnotujmy, że warunek przeliczalnej addytywności z tej definicji może oznaczać zarówno że szereg $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ jest zbieżny do wartości po lewej stronie, jak i że szereg jest rozbieżny i miara zbioru $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ jest nieskończona.

Definicja przeliczalnej addytywności jest dostosowana do potrzeb Twierdzenia 1.4.2 poniżej. Naszym docelowym obiektem badań będzie *miara*, czyli przeliczalnie addytywna funkcja zbioru określona na $\sigma$–ciele.

**Lemat 1.2.4** *Jeśli* $\mu$ *jest przeliczalnie addytywną funkcją na pierścieniu* $\mathcal{R}$ *to dla* $R \in \mathcal{R}$ *i dowolnego ciągu* $A_n \in \mathcal{R}$, *takich że* $R = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, *zachodzi nierówność*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

*Dowód.* Przyjmijmy $B_1 = A_1$ oraz

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$$

dla $n > 1$. Wtedy zbiory $B_n$ są parami rozłączne, $B_n \subseteq A_n$ oraz $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n = R$ więc na mocy Lematu 1.2.2(a)

$$\mu(R) = \sum_n \mu(B_n) \leqslant \sum_n \mu(A_n).$$

♢

Zauważmy, że dla funkcji addytywnej $\mu$ na $\mathcal{R}$ i zbioru $R \in \mathcal{R}$, który jest sumą parami rozłącznego ciągu zbiorów $A_n \in \mathcal{R}$, dla każdego $n$ zachodzi nierówność

$$\mu(R) \geqslant \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i),$$

co implikuje $\mu(R) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Mówiąc obrazowo: funkcja addytywna jest przeliczalnie nadaddytywna. Jak zobaczymy na przykładach przeliczalna addytywność jest warunkiem istotnie mocniejszym. Najpierw jednak przekonamy się, że przeliczalną addytywność można wyrazić na różne sposoby.

**Twierdzenie 1.2.5** *Addytywna funkcji zbioru $\mu$ na pierścieniu $\mathcal{R}$ jest przeliczanie addytywna wtedy i tylko wtedy gdy jest ciągła z dołu, to znaczy dla każdego $A \in \mathcal{R}$ i ciągu $A_n \in \mathcal{R}$, takiego że $A_n \uparrow A$, zachodzi wzór $\lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$.*

*Dowód.* Warunek ciągłości z dołu jest konieczny: Dla rosnącego ciągu zbiorów $A_n \uparrow A$ połóżmy $B_1 = A_1$ oraz $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ gdy $n > 1$. Wtedy $A = \bigcup_n B_n$, przy czym zbiory $B_n$ są parami rozłączne, a zatem

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) = \lim_n \mu(A_n).$$

Rozważmy teraz parami rozłączne zbiory $A_n$ i $A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{R}$. Niech $S_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Wtedy $S_n \uparrow A$ i warunek ciągłości pociąga za sobą

$$\mu(A) = \lim_N \mu(S_N) = \lim_N (\mu(A_1) + \ldots \mu(A_N)) = \sum_n \mu(A_n),$$

a więc przeliczalną addytywność. $\diamondsuit$

**Twierdzenie 1.2.6** *Dla addytywnej funkcji zbioru $\mu$ na pierścieniu $\mathcal{R}$, przyjmującej tylko wartości skończone następujące warunki są równoważne (gdzie zawsze $A_n, A \in \mathcal{R}$)*

- *(i) $\mu$ jest przeliczalnie addytywna;*
- *(ii) $\mu$ jest ciągła z góry, to znaczy $\lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$ jeżeli $A_n \downarrow A$;*
- *(iii) $\mu$ jest ciągła z góry na zbiorze $\emptyset$, czyli $\lim_n \mu(A_n) = 0$ jeżeli $A_n \downarrow \emptyset$.*

*Dowód.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Tutaj przyjmujemy $B_n = A_1 \setminus A_n$; wtedy $B_n \uparrow A_1 \setminus A$ więc, na mocy Twierdzenia 1.2.5,

$$\lim_n \mu(A_1 \setminus A_n) = \lim_n \mu(B_n) = \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A),$$

co implikuje $\lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$ po odjęciu $\mu(A_1)$ stronami.

Imlikacja $(ii) \Rightarrow (iii)$ jest oczywista po wstawieniu $A = \emptyset$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Rozważmy parami rozłączne zbiory $A_n$ i $A = \bigcup_n A_n$. Niech $S_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Wtedy $S_n \uparrow A$ i

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \ldots \mu(A_n) + \mu(A \setminus S_n).$$

Ponieważ $\lim_n \mu(A \setminus S_n) = 0$, powyższe pociąga zbieżność szeregu do $\mu(A)$. $\diamondsuit$

**Przykład 1.2.7** Niech $\mathcal{A}$ będzie ciałem generowanym przez wszystkie skończone podzbiory $X$, gdzie $X$ jest nieskończony. Wtedy $A \in \mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy gdy

(†) $A$ jest skończony lub $X \setminus A$ jest skończony.

Istotnie, każdy zbiór o własności (†) należy do $\mathcal{A}$, jako że taki zbiór łatwo zapisać za pomocą singletonów i operacji sumy i dopełnienia. Z drugiej strony rodzina zbiorów o własności (†) jest zamknięta na sumy skończone i dopełnienia, a więc rodzina ta jest ciałem.

Zdefiniujmy funkcję $\mu$ na $\mathcal{A}$, gdzie $\mu(A) = 0$ gdy $A$ jest skończony i $\mu(A) = 1$ w przeciwnym przypadku. Wtedy $\mu$ jest skończenie addytywna na $\mathcal{A}$. Istotnie jeśli $A, B \in \mathcal{A}$ są rozłączne to $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, ponieważ albo oba zbiory sa skończone (i po obu stronach wzoru jest 0), albo dokładnie jeden zbiór jest nieskończony i mamy równość 1=1; (zauważmy, że jeśli obydwa zbiory $A, B \in \mathcal{A}$ są nieskończone to $A \cap B \neq \emptyset$). Jeśli $X$ jest nieskończonym zbiorem przeliczalnym to możemy napisać $X = \bigcup_n \{x_n\}$ dla pewnego ciągu $x_n$ i dlatego $\mu$ nie jest przeliczalnie addytywna w tym przypadku.

Niech teraz $\Sigma$ będzie $\sigma$–ciałem generowanym przez wszystkie przeliczalne podzbiory $X$, gdzie sam $X$ jest nieprzeliczalny. Możemy analogicznie sprawdzić, że $A \in \Sigma$ wtedy i tylko wtedy gdy albo zbiór $A$, albo jego dopełnienie $X \setminus A$ jest przeliczalne. Kładąc $\mu(A) = 0$ gdy $A$ jest przeliczalny i $\mu(A) = 1$ w przeciwnym przypadku, określamy miarę na $\Sigma$. Istotnie, jeśli $A_n \in \Sigma$ są parami rozłączne i wszystkie zbiory $A_n$ sa przeliczalne to także zbiór $A = \bigcup_m A_n$ jest przeliczalny i dlatego

$$0 = \mu(A) = \sum_n \mu(A_n) = 0.$$

Jeśli $A_k$ jest nieprzeliczalny dla pewnego $k$ to zbiory $A_n \subseteq X \setminus A_k$ dla $n \neq k$ są przeliczalne i po obu stronach wzoru powyżej mamy 1.

Na $\sigma$–ciele $\mathcal{P}(X)$ można zdefiniować miarę w następujący prosty sposób: ustalmy $x_0 \in X$ i przyjmijmy $\mu(A) = 0$ gdy $x_0 \notin A$ i $\mu(A) = 1$ dla $x_0 \in A$. Sprawdzenie przeliczalnej addytywności nie powinno przedstawiać trudności (por. Zadanie 1.10.16). Miarę taką nazywamy *deltą Diraca* i oznaczamy $\mu = \delta_{x_0}$. $\diamondsuit$

## 1.3 Miara Lebesgue'a I

Przykład 1.2 podaje proste, wręcz banalne, przykłady miar. W tej części zdefiniujemy naturalną funkcję zbioru $\lambda$ na pierścieniu $\mathcal{R}$, generowanym przez przedziały postaci $[a, b)$, por. Przykład 1.1.4. Funkcja $\lambda$ ma za zadanie mierzyć "długość" zbiorów na prostej rzeczywistej i dlatego przyjmujemy $\lambda([a, b)) = b - a$ dla $a < b$. Dla zbioru $R \in \mathcal{R}$ postaci

$$(*) \quad R = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i), \qquad \text{gdzie} \quad a_i < b_i, [a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \emptyset \text{ dla } i \neq j, \text{definujemy}$$

$$(**) \quad \lambda(R) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

W dalszym ciągu sprawdzimy, że $\lambda$ jest dobrze określoną, przeliczalnie addytywną funkcją zbioru na pierścieniu $\mathcal{R}$. Poniżej przyjmiemy dla uproszczenia konwencję, że dla każdego rozważanego przedziału $[a, b)$ milcząco zakładamy, że $[a, b) \neq \emptyset$, czyli że $a < b$.

**Lemat 1.3.1** *Jeżeli* $[a_n, b_n)$ *jest skończonym lub nieskończonym ciągiem parami rozłącznych przedziałów zawartych w* $[a, b)$ *to*

$$\sum_n (b_n - a_n) \leqslant b - a.$$

*Dowód.* Dowód dla ciągu skończonego $[a_1, b_1), \ldots, [a_n, b_n)$ można przeprowadzić przez indukcję: przyjmijmy, że $b_n = \max(b_1, \ldots, b_n)$. Wtedy $b_i \leqslant a_n$ dla $i < n$ więc $[a_i, b_i) \subseteq [a, a_n)$ dla $i < n$ i dlatego, na mocy założenia indukcyjnego, $\sum_{i<n}(b_i - a_i) \leqslant a_n - a$. Teraz

$$\sum_{i \leqslant n} (b_i - a_i) \leqslant (a_n - a) + (b_n - a_n) = b_n - a \leqslant b - a.$$

W przypadku nieskończonego ciągu $[a_n, b_n)$ mamy $\sum_{n \leqslant N}(b_n - a_n) \leqslant (b - a)$ dla każdego $N$ więc, przechodząc z $N$ do nieskończoności, otrzymujemy $\sum_n (b_n - a_n) \leqslant (b - a)$. $\diamondsuit$

**Lemat 1.3.2** *Jeżeli* $[a_n, b_n)$ *jest skończonym lub nieskończonym ciągiem przedziałów i* $[a, b) \subseteq \bigcup_n [a_n, b_n)$ *to*

$$b - a \leqslant \sum_n (b_n - a_n).$$

*Dowód.* (1) Przypadek skończony dowodzimy znowu przez indukcję: niech $[a, b) \subseteq \bigcup_{i \leqslant n} [a_i, b_i)$. Możemy bez zmniejszenia ogólności założyć, że $b \in [a_n, b_n)$; wtedy $[a, a_n) \subseteq \bigcup_{i<n} [a_i, b_i)$ więc $a_n - a \leqslant \sum_{i<n}(b_i - a_i)$ z założenia indukcyjnego, i

$$b - a \leqslant b_n - a_n + a_n - a \leqslant \sum_{i \leqslant n} (b_i - a_i).$$

(2) Zauważmy, że przypadek nieskończony nie redukuje się do skończonego w oczywisty sposób i dlatego w rozumowaniu wykorzystamy Twierdzenie 0.3.4. Ustalmy $\varepsilon > 0$; skoro $[a, b) \subseteq \bigcup_n [a_n, b_n)$ to

$$[a, b - \varepsilon] \subseteq \bigcup_n (a_n - \varepsilon 2^{-n}, b_n),$$

więc na mocy 0.3.4 dla pewnego $N$ zachodzi $[a, b - \varepsilon] \subseteq \bigcup_{n \leqslant N} (a_n - \varepsilon 2^{-n}, b_n)$ co na mocy (1) daje

$$b - a - \varepsilon \leqslant \sum_{n \leqslant N} (b_n - a_n + 2^{-n}\varepsilon) \leqslant \sum_n (b_n - a_n) + \varepsilon.$$

W ten sposób, z uwagi na dowolność $\varepsilon > 0$, otrzymujemy żądaną nierówność. $\diamondsuit$

**Lemat 1.3.3** *Definicja $\lambda$ jest poprawna.*

*Dowód.* Zauważmy najpierw, że z Lematów 1.3.1 i 1.3.2 wynika, że jeśli $[a, b)$ jest rozłączną sumą przedziałów $[a_1, b_1), \ldots, [a_n, b_n)$ to $b - a = \sum_{i \leqslant n}(b_i - a_i)$.

Każdy $R \in \mathcal{R}$ ma przynajmniej jedno przedstawienie w postaci sumy parami rozłącznych przedziałów jak w (*), patrz Lemat 1.1.4. Niech

$$R = \bigcup_{i \leqslant n}[a_i, b_i) = \bigcup_{j \leqslant k}[c_i, d_j)$$

bedą dwiema takimi reprezentacjami. Dla $i \leqslant n, j \leqslant k$ oznaczmy przez $P_{i,j} = [a_i, b_i) \cap [c_j, d_j)$; wtedy $P_{i,j}$ jest pusty lub jest przedziałem postaci $[x, y)$.

Dla ustalonego $i \leqslant n$ mamy

$$[a_i, b_i) = \bigcup_{j \leqslant k}[a_i, b_i) \cap [c_j, d_j),$$

co daje $b_i - a_i = \sum_{j \leqslant k} \lambda(P_{i,j})$ na mocy uwagi powyżej. Ostatecznie

$$\sum_{i \leqslant n}(b_i - a_i) = \sum_{i,j} \lambda(P_{i,j}) = \sum_{j \leqslant k}(d_i - c_i),$$

gdzie druga równość wynika z analogicznego rozumowania. $\diamondsuit$

**Twierdzenie 1.3.4** *Funkcja $\lambda$ zdefinowana wzorem (**) jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru $\lambda$ na pierścieniu przedziałów $\mathcal{R}$.*

*Dowód.* Addytywność $\lambda$ wynika łatwo z samej definicji w (**) (i jej poprawności). Jeżeli $[a, b)$ jest sumą parami rozłącznych zbiorów $R_n \in \mathcal{R}$ to, przedstawiając każdy $R_n$ w postaci rozłącznej sumy

$$R_n = \bigcup_{i \leqslant k_n} [a_i^n, b_i^n),$$

otrzymujemy

$$b - a = \sum_{n, i \leqslant k_n} (b_i^n - a_i^n) = \sum_n \sum_{i \leqslant k_n} (b_i^n - a_i^n) = \sum_n \lambda(R_n).$$

Przypadek ogólny, gdy $R \in \mathcal{R}$ jest sumą zbiorów $R_n \in \mathcal{R}$ otrzymamy przez prostą indukcję po ilości przedziałów występujących w przedstawieniu $R$. $\diamondsuit$

## 1.4 Twierdzenie o konstrukcji miary

W poprzedniej części pokazaliśmy, że miarę można zdefiniować efektywnym wzorem na rodzinie podzbiorów prostej zbudowanych w sposób elementarny. Aby taką funkcję $\lambda$ rozszerzyć do miary na $\sigma$-ciele $Bor(\mathbb{R})$ potrzebna jest jednak pewna ogólna procedura, która pozwoli nam pokonać trudności ze śledzeniem, jak z danego układu zbiorów generowane jest $\sigma$-ciało.

W dalszym ciągu ograniczymy się do rozważania $\sigma$-skończonych funkcji zbioru; to pojęcie wyjaśnione jest w definicji poniżej.

**Definicja 1.4.1** *Powiemy że funkcja $\mu$ jest $\sigma$-skończona na pierścieniu $\mathcal{R}$ podzbiorów $X$ jeżeli istnieją zbiory $X_n \in \mathcal{R}$, takie że $X = \bigcup_n X_n$ i $\mu(X_n) < \infty$ dla każdego $n$.*

Następujące *Twierdzeniem o konstrukcji miary* jest kluczowe.

**Twierdzenie 1.4.2** *Jeżeli $\mu$ jest przeliczalnie addytywną i $\sigma$-skończoną funkcją na pierścieniu $\mathcal{R}$ to $\mu$ rozszerza się jednoznacznie do miary na $\sigma(\mathcal{R})$.*

Dowód istnienia takiego rozszerzenia do miary jest niewątpliwe najbardziej złożonym elementem całego wykładu i dlatego zostanie odłożony na koniec tego rozdziału. Wcześniej przekonamy się, że

*wystarczy uwierzyć w istnienie miary, aby wyprowadzić jej własności.*

Jak piszą oględnie autorzy podręczników *dowód 1.4.2 można pominąć, przynajmniej przy pierwszym czytaniu.* Odnosi się to z pewnością to dowodu istnienia rozszerzenia[1]. Dowód jednoznaczności rozszerzenia jest o tyle istotniejszy, ze stosowana w nim technika ma inne zastosowania. Pierwsza ilustracja powyższej zasady metamatematycznej:

**Twierdzenie 1.4.3** *Jeżeli, w warunkach Twierdzenia 1.4.2, oznaczymy przedłużenie $\mu$ do miary na $\sigma(\mathcal{R})$ tą samą literą to dla każdego $A \in \sigma(\mathcal{R})$ o własności $\mu(A) < \infty$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $R \in \mathcal{R}$, taki że $\mu(A \bigtriangleup R) < \varepsilon$.*

*Dowód.* Rozważmy najpierw przypadek $X \in \mathcal{R}$ i $\mu(X) < \infty$ (wtedy $\mathcal{R}$ jest ciałem). Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną tych $A \in \sigma(\mathcal{R})$, które dają się aproksymować zbiorami z $\mathcal{R}$ w powyższy sposób. Wtedy oczywiście $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{R})$; wystarczy więc sprawdzić, że $\mathcal{A}$ jest $\sigma$-ciałem, aby otrzymać $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R})$, czyli tezę twierdzenia.

Rodzina $\mathcal{A}$ jest zamknięta na branie dopełnień (zauważmy, że $A^c \bigtriangleup R^c = A \bigtriangleup R$). Jeżeli $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ i $\varepsilon > 0$ to biorąc $R_i \in \mathcal{R}$, takie że $\mu(A_i \bigtriangleup R_i) < \varepsilon/2$ dla $i = 1, 2$, otrzymujemy $\mu((A_1 \cup A_2) \bigtriangleup (R_1 \cup R_2)) < \varepsilon$. Dlatego $\mathcal{A}$ jest zamknięta na skończone sumy, jest ciałem zbiorów. Wystarczy jeszcze upewnić się, że jeżeli zbiory $A_n \in \mathcal{A}$ tworzą ciąg niemalejący to $A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$. Dla $\varepsilon > 0$ istnieje $n$, takie że $\mu(A \setminus A_n) <$

[1] w którym, nawiasem mówiąc, $\sigma$-skończoność nie jest potrzebna

$\varepsilon/2$. Ponieważ $A_n \in \mathcal{A}$ więc istnieje $R \in \mathcal{R}$, taki że $\mu(A_n \triangle R) < \varepsilon/2$. Czytelnik sprawdzi, że wtedy $\mu(A \triangle R) < \varepsilon$ i to zakończy dowód przypadku skończonego.

W ogólnym przypadku rozważamy rozkład $X = \bigcup_n X_n$, gdzie $X_n \in \mathcal{R}$ są miary skończonej. Z pierwszej części dowodu wynika że, dla ustalonego $n$, każdy zbiór z $\sigma(\mathcal{R})$ zawarty w $X_n$ daje się odpowiednio aproksymować. Z kolei $A$ jest sumą zbiorów $A_n = A \cap \bigcup_{i \leqslant n} X_i$ więc możemy zakończyć dowód, rozumując jak przed chwilą, w końcówce przypadku skończonego. $\diamondsuit$

## 1.5 Przestrzenie miarowe

Terminem *miara* będziemy określać przeliczalnie addytywną funkcję zbioru określoną na $\sigma$-ciele.

**Definicja 1.5.1** *Przestrzenią miarową nazywamy trójkę $(X, \Sigma, \mu)$, gdzie $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ jest $\sigma$-ciałem, a $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ jest miarą.*

Zauważmy, że dla danej przestrzeni miarowej $(X, \Sigma, \mu)$, jeżeli $\Sigma' \subseteq \Sigma$ jest mniejszym $\sigma$-ciałem, to $(X, \Sigma', \mu')$ gdzie $\mu' = \mu_{|\Sigma'}$ jest, formalnie rzecz biorąc, inną przestrzenią miarową. Często jednak dla wygody obcięcia $\mu$ do podrodzin $\Sigma$ oznaczamy tą samą literą.

**Definicja 1.5.2** *Przestrzeń miarową $(X, \Sigma, \mu)$ nazywamy* skończoną *jeżeli $\mu(X) < \infty$ oraz* probabilistyczną *w przypadku, gdy $\mu(X) = 1$. Przestrzeń taka jest $\sigma$-*skończona*, jeżeli istnieją zbiory $X_k \in \Sigma$, takie że $X = \bigcup_k X_k$ i $\mu(X_k) < \infty$ dla każdego $k$.*

W przestrzeniach miarowych można dokonywać operacji brania podprzestrzeni, co opisujemy w poniższym twierdzeniu, którego dowód jest zupełnie oczywisty.

**Twierdzenie 1.5.3** *Dla przestrzeni miarowej $(X, \Sigma, \mu)$ i zbioru $Y \in \Sigma$ oznaczmy*

$$\Sigma_Y = \{A \in \Sigma : A \subseteq Y\}.$$

*Wtedy $(Y, \Sigma_Y, \mu_Y)$, gdzie $\mu_Y(A) = \mu(A)$ dla $A \in \Sigma_Y$ jest przestrzenią miarową.*

Każdą miarę można, tanim kosztem, uzupełnić.

**Definicja 1.5.4** *Mówimy, że przestrzeń miarowa $(X, \Sigma, \mu)$ jest* zupełna *jeżeli dla każdego $A \in \Sigma$, jeżeli $\mu(A) = 0$ to wszystkie podzbiory $A$ należą do $\Sigma$. W takim przypadku mówimy też, że $\Sigma$ jest $\sigma$-ciałem zupełnym względem $\mu$*

Dowód twierdzenie podanego poniżej będzie potraktowany jako ćwiczenie, patrz Zadanie 1.10.19.

**Twierdzenie 1.5.5** *Dla każdej przestrzeni miarowej $(X, \Sigma, \mu)$ istnieje przestrzeń miarowa zupełna $(X, \widehat{\Sigma}, \widehat{\mu})$, gdzie $\widehat{\Sigma} \supseteq \Sigma$ i $\widehat{\mu}$ jest rozszerzeniem miary $\mu$ na $\widehat{\Sigma}$.*

*Dowód.* Niech $\widehat{\Sigma}$ będzie rodziną zbiorów postaci $A \triangle N$, gdzie $A \in \Sigma$ i $N \subseteq B \in \Sigma$, przy czym $\mu(B) = 0$. Istota dowodu polega na sprawdzeniu, że $\widehat{\Sigma}$ jest $\sigma$-ciałem i wzór $\widehat{\mu}(A \triangle N) = \mu(A)$ poprawnie definiuje miarę. $\diamondsuit$

## 1.6 Miara Lebesgue'a II

W podrozdziale 1.3 zdefiniowaliśmy funkcję zbioru $\lambda$ na pierścieniu $\mathcal{R}$ podzbiorów prostej, generowanym przez przedziały postaci $[a, b)$. Ponieważ $\lambda$ jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru na $\mathcal{R}$ więc z Twierdzenia 1.4.2 wynika, że $\lambda$ rozszerza się jednoznacznie do miary na $Bor(\mathbb{R})$. I to jest owa słynna miara Lebesgue'a (na prostej rzeczywistej). Liniowa miara Lebesgue'a jest więc po prostu uogólnieniem elementarnej koncepcji długości odcinka. Tak jak obiecaliśmy, z samego faktu istnienia jedynej takiej miary wyprowadzimy jej podstawowe własności.

Mamy więc pierwszy niebanalny przykład przestrzeni miarowej: $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), \lambda)$. Stosując zabieg opisany w Twierdzeniu 1.5.3 możemy też wyróżnić podstawową przestrzeń probabilistyczną: $([0, 1], Bor[0, 1], \lambda)$.

Zbiory borelowskie można uzupełnić względem miary Lebesgue'a, jak to opisano w twierdzeniu 1.5.5. Oznaczmy takie uzupełnione $\sigma$-ciało przez $\mathfrak{L}$ (na cześć Lebesgue'a). Zbiór $A \in \mathfrak{L}$ nazywamy *mierzalnym w sensie Lebesgue'a*. Taki zbiór można więc zapisać jako $A = B \triangle N$, gdzie $B \in Bor(\mathbb{R})$ i $N$ jest podzbiorem zbioru miary zero (zbiór mierzalny to modyfikacja zbioru borelowskiego na zbiorze miary zero). Otrzymujemy zupełną przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, \lambda)$ (jak zwykle pozostawiamy to samo oznaczenie na miarę). Jak się okaże, zabieg uzupełniania jest drobny, ale bywa istotny.

Odnotujmy przede wszytskim, że $\lambda(\{x\}) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ (dlatego że $\lambda([x, x + \delta)) = \delta$ dla $\delta > 0$. Stąd wynika natychmiast że dla $a < b$ mamy

$$\lambda([a, b)) = \lambda((a, b)) = \lambda([a, b]).$$

**Twierdzenie 1.6.1** *(a) Każdy zbiór przeliczalny jest miary Lebesgue'a zero.*

*(b) Dla każdego $A \in \mathfrak{L}$ istnieją zbiory borelowskie $B_1 \subseteq A \subseteq B_2$, takie że $\lambda(B_2 \setminus B_1) = 0$.*

*(c) Dla każdego zbioru mierzalnego $A \in \mathfrak{L}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty $V$ i zbiór domknięty $F$, takie że $F \subseteq A \subseteq V$ i $\lambda(V \setminus F) < \varepsilon$.*

*Dowód.* Zbiór przeliczalny $A$ jest przeliczalną sumą postaci $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$ więc $\lambda(A) = 0$ wprost z przeliczalnej addytywności.

Każdy zbiór $A \in \mathfrak{L}$ jest postaci $A = B \triangle N$ gdzie $N$ jest podzbiorem borelowskiego zbioru $C$ miary zero. Wtedy można przyjąc $B_1 = B \setminus C$ i $B_2 = B \cup C$.

Z uwagi na $(b)$, wystarczy $(c)$ sprawdzić dla $A \in Bor(\mathbb{R})$. Rozważamy najpierw zbiory borelowskie $A$ zawarte w $[0, 1]$ i stosujemy znany chwyt: Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną tych borelowskich $A \subseteq [0, 1]$, które aproksymują się od góry zbiorami otwartymi $V$ (otwartymi w $\mathbb{R}$), i od dołu zbiorami domkniętymi. Jest to rodzina podzbiorów $[0, 1]$ zamknięta na branie dopełnień (w $[0, 1]$). Istotnie, jeżeli $F \subseteq A \subseteq V$ to

$$[0, 1] \setminus V \subseteq [0, 1] \setminus A \subseteq [0, 1] \cap F^c.$$

Tutaj $[0, 1]\setminus V$ jest zbiorem domkniętym; zbiór $[0, 1]\cap F^c$ nie musi być co prawda otwarty, ale można go powiększyć, kosztem nieznacznego zwiększenia miar, do otwartego zbioru $(-\delta, 1 + \delta) \cap F^c$.

Sprawdzamy teraz bez trudu, że $\mathcal{A}$ jest ciałem podzbiorów $[0,1]$ (zbiory otwarte są zamknięte na skończone sumy i przekroje, tę samą własność mają zbiory domknięte). Ostatecznie rozważamy rosnący ciąg $A_n \in \mathcal{A}$ i sprawdzamy, że $A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$, postępując jak w dowodzie 1.4.3.

Pierwszą częśc dowodu można oczywiście odnieść do ustalonego odcinka $[n, n+1]$. Ostatecznie, biorąc dowolny zbiór borelowski $A$, dla danego $\varepsilon > 0$ przykrywamy każdy zbiór $A \cap [n, n+1]$ otwartym zbiorem $V_n$ z dokładnością $\varepsilon/2^{|n|+2}$ (tutaj $n$ przebiega liczby całkowite). Wtedy $V = \bigcup_n V_n \supseteq A$ i

$$\lambda(V \setminus A) \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda(V_n \setminus A \cap [n, n+1]) \leqslant \varepsilon.$$

Aproksymacja od dołu zbiorem domkniętym przebiega analogicznie. Co prawda na ogół nieskończona suma zbiorów domkniętych nie musi być domknięta, ale $\bigcup_n F_n$ jest zbiorem domknięty, o ile zbiory domknięte spełniają warunek $F_n \subseteq [n.n+1]$, proszę sprawdzić! $\diamondsuit$

Stosując Twierdzenie 1.4.3 otrzymujemy inny ważny fakt.

**Twierdzenie 1.6.2** *Jeżeli $A \in \mathfrak{L}$ i $\lambda(A) < \infty$ to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $J$ będący skończoną sumą odcinków i taki że $\lambda(A \triangle J) < \varepsilon$.*

Odnotujmy jeszcze następujący wniosek.

**Wniosek 1.6.3** *Jeżeli $A \in \mathfrak{L}$ i $\lambda(A) < \infty$ to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty (czyli domknięty i ograniczony) $K \subseteq A$, taki że $\lambda(A \setminus K) < \varepsilon$.*

*Dowód.* Dla $A_n = A \cap (-n, n)$ mamy $A_n \uparrow A$ i dlatego $\lambda(A_n)$ zbiega do $\lambda(A)$. Wybierzmy $n$ takie że $\lambda(A_n) > \lambda(A) - \varepsilon/2$; z Twierdzenia 1.6.1 istnieje zbiór domknięty $K \subseteq A_n$ o własności $\lambda(A_n \setminus K) < \varepsilon/2$. Wtedy $K$ jest zbiorem zwartym i

$$\lambda(A \setminus K) \leqslant \lambda(A \setminus A_n) + \lambda(A_n \setminus K) < \varepsilon.$$

$\diamondsuit$

Jak się okazuje dowolny zbiór mierzalny można na rózne sposoby aproksymować z punktu widzenia miary stosunkowo prostymi pozbiorami prostej. Nie należy jednak mylić inkluzji w Twierdzeniu 1.6.1(c): zbiór $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ jest miary 1, ale nie zawiera niepustych zbiorów otwartych. Podobnie zbiór $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ jest miary zero, ale każdy domknięty $F \supseteq [0,1] \cap \mathbb{Q}$ w istocie zawiera $[0,1]$ więc $\lambda(F) \geqslant 1$; por. Zadanie 1.10.24.

**Przykład 1.6.4** Niech $C \subseteq [0,1]$ będzie "trójkowym" zbiorem Cantora; przypomnijmy, że zbiór $C$ powstaje w ten sposób, że odcinek jednostkowy dzielimy na 3 części punktami $1/3$ i $2/3$ i usuwamy z niego środkowy odcinek otwarty $(1/3, 2/3)$. Nastepnie w drugim kroku stosujemy analogiczną operację w odcinkach $[0, 1/3]$ i $[2/3, 1]$, usuwając odpowiednio odcinki $(1/9, 2/9)$ i $(7/9, 8/9)$. Itd... Nietrudno policzyć, że łączna długość usuwanych odcinków wynosi 1; tym samym $\lambda(C) = 1 - 1 = 0$. Zauważmy, że $C$ jest zbiorem domkniętym i nie zawiera żadnego niepustego przedziału.

Inaczej mówiąc, zbiór $C$ składa się ze wszystkich liczb $x \in [0, 1]$, które można zapisać w systemie trójkowym za pomocą cyfr 0 i 2. W ten sposób można uzasadnić, że $C$ jest zbiorem nieprzeliczalnym, równolicznym ze zbiorem $\mathbb{R}$. Istnieją też wersje takiej konstrukcji, prowadzące do zbioru "typu Cantora" miary dodatniej, patrz Zadanie 1.10.25 $\diamondsuit$

Wykorzystując własności zbioru Cantora wspomniane powyżej oraz Problem 1.11.C można wynioskować, że $\mathfrak{L} \neq Bor(\mathbb{R})$. Istotnie, każdy zbiór $A \subseteq C$ jest mierzalny, jako że $\lambda(C) = 0$. W teorii mnogości dowodzi się, że rodzina $\mathcal{P}(C)$ jest mocy $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$, a moc $Bor(\mathbb{R})$ wynosi jedynie $\mathfrak{c}$. Dlatego też $C$ zawiera nieborelowskie zbiory mierzalne.

W tym miejcu warto wspomnieć o własnościach miary Lebesgue'a związanych ze strukturą grupy addytywnej $(\mathbb{R}, +)$. Dla $B \subseteq \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}$ piszemy $x + B$ na oznaczenie translacji zbioru $B$, czyli $\{x + b : b \in B\}$.

**Twierdzenie 1.6.5** *Dla dowolnego $B \in Bor(\mathbb{R})$ i $x \in \mathbb{R}$ mamy $x + B \in Bor(\mathbb{R})$ i $\lambda(x + B) = \lambda(B)$.*

*Dowód.* Jeśli oznaczymy przez $\mathcal{A}$ rodzinę tych $B \in Bor(\mathbb{R})$, dla których wszystkie translacje są borelowskie to $\mathcal{A}$ zawiera wszystkie odcinki otwarte $(a, b)$, jako że $x + (a, b) = (a + x, b + x)$. Wystarczy teraz zauważyć, że rodzina $\mathcal{A}$ jest $\sigma$-ciałem, aby otrzymać $\mathcal{A} = Bor(\mathbb{R})$. Dla ustalonego $x$ rozważmy miarę $\mu$ na $Bor(\mathbb{R})$, daną przez wzór $\mu(A) = \lambda(x + A)$ (sprawdzenie, że $\mu$ jest istotnie przeliczalnie addytywna pozostawiamy czytelnikowi). Dla $a < b$ mamy

$$\mu([a, b)) = \lambda([x + b, x + b)) = b - a = \lambda([a, b));$$

wynika stąd że $\mu(R) = \lambda(R)$ dla $R$ z pierścienia przedziałów i tym samym $\mu(B) = \lambda(B)$ dla $B \in Bor(\mathbb{R})$ z jednoznaczności rozszerzenia miary Lebesgue'a. $\diamondsuit$

Nietrudno rozszerzyć niezmienniczość opisaną w Twierdzeniu 1.6.5 na $\sigma$-ciało zbiorów mierzalnych $\mathfrak{L}$. Prowadzi to do klasycznej konstrukcji Vitalego, która pokazuje, że można za pomocą pewnika wyboru udowodnić istnienie podzbioru prostej rzeczywistej, który nie jest mierzalny, por. Problem 1.11.F.

## 1.7 Jednoznaczność rozszerzenia miary

Jeżeli $\mathcal{R}$ jest pierścieniem zbiorów przeliczalnych w nieprzeliczalnym zbiorze $X$ to funkcję $\mu$ tożsamościowo równą zeru na $\mathcal{R}$ można przedłużyć na $\sigma(\mathcal{R})$ na wiele sposobów. Okazuje się jednak, że w typowej sytuacji rozszerzenie do miary jest jedyne. Dowód tego faktu opiera się na następującym pomyśle.

**Definicja 1.7.1** *Rodzinę $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy* klasą monotoniczną *jeśli dla dowolnego ciągu $A_n \in \mathcal{M}$*

*(i) jeżeli $A_n \uparrow A$ to $A \in \mathcal{M}$;*

*(ii) jeżeli $A_n \downarrow A$ to $A \in \mathcal{M}$.*

Oczywiście każdy $\sigma$-pierścień jest automatycznie klasą monotoniczną; zauważmy, że pierścień będący klasą monotoniczną jest $\sigma$-pierścieniem, patrz Zadanie 1.10.8. Poniższe, wcale nieoczywiste, twierdzenie bywa tradycyjnie nazywane *lematem o klasie monotonicznej*.

**Twierdzenie 1.7.2** *Jeżeli klasa monotoniczna $\mathcal{M}$ zawiera pierścień $\mathcal{R}$ to zawiera też $\sigma$-pierścień $s(\mathcal{R})$ generowany przez $\mathcal{R}$.*

*Dowód.* Oznaczmy $\mathcal{S} = s(\mathcal{R})$; zauważmy, że wystarczy jeśli sprawdzimy, że jeżeli $\mathcal{M}$ jest najmniejszą klasą monotoniczną zawierającą $\mathcal{R}$ to $\mathcal{M} = \mathcal{S}$. Zauważmy przy tym, że $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$, jako że każdy $\sigma$-pierścień jest klasą monotoniczną.

Dla dowolnego $A \subseteq X$ rozważymy rodzinę $k(A)$, gdzie

$$k(A) = \{B : A \setminus B, B \setminus A, A \cup B \in \mathcal{M}\}.$$

Zauważmy, że $B \in k(A)$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \in k(B)$, z uwagi na symetrię warunków. Odnotujmy też, że rodzina $k(A)$ jest klasą monotoniczną dla dowolnego $A$; na przykład jeśli $B_n \in k(A)$ i $B_n \uparrow B$ to

$$A \setminus B_n \downarrow A \setminus B, \quad B_n \setminus A \uparrow B \setminus A, \quad B_n \cup A \uparrow B \cup A,$$

co dowodzi że $B \in k(A)$.

Dla $R \in \mathcal{R}$ z definicji pierścienia wynika natychmiast, że $\mathcal{R} \subseteq k(R)$. Tym samym, jako że $k(R)$ jest klasą monotoniczną, $\mathcal{M} \subseteq k(R)$ dla $R \in \mathcal{R}$. Inaczej mówiąc, jeśli $M \in \mathcal{M}$ i $R \in \mathcal{R}$ to $M \in k(R)$, a więc także $R \in k(M)$. Stąd otrzymujemy $\mathcal{R} \subseteq k(M)$ dla $M \in \mathcal{M}$, a zatem $\mathcal{M} \subseteq k(M)$ dla $M \in \mathcal{M}$. To ostatnie stwierdzenie oznacza po prostu że $\mathcal{M}$ jest pierścieniem. Klasa monotoniczna będąca pierścieniem jest automatycznie $\sigma$-pierścieniem, co ostatecznie dowodzi, że $\mathcal{M} = \mathcal{S}$. $\diamondsuit$

**Twierdzenie 1.7.3** *Niech $\mu$ będzie przeliczalnie addytywną funkcją zbioru na pierścieniu $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Załóżmy, że $X = \bigcup_k S_k$ dla pewnych $S_k \in \mathcal{R}$, takich że $\mu(S_k) < \infty$.*

*Wtedy $\mu$ ma co najwyżej jedno przedłużenie do miary na $\sigma(\mathcal{R})$.*

*Dowód.* Załóżmy, że $\mu_1$, $\mu_2$ są miarami na $\sigma(\mathcal{R})$, takimi, że $\mu_1(R) = \mu_2(R) = \mu(R)$ dla $R \in \mathcal{R}$. Będziemy rozumować jak poprzednio, rozważając wpierw przypadek miary skończonej.

Załóżmy, że $X \in \mathcal{R}$ i $\mu(X) < \infty$; rozważmy rodzinę $\mathcal{M}$ tych $A \in \sigma(\mathcal{R})$, dla których $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Wtedy $\mathcal{M}$ jest klasą monotoniczną, co wynika natychmiast z Twierdzenia 1.2. mamy $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{R}$ i dlatego $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{R})$ po zastosowaniu lematu o klasie monotonicznej 1.7.2. Oznacza to, że co $\mu_1 = \mu_2$.

W przypadku ogólnym możemy założyć, że zbiory $S_k$ są parami rozłączne. Z pierwszej części dowodu, zastosowanej do każdego zbioru $S_k$ z osobna, wynika, że jeśli $A \in \sigma(\mathcal{R})$ i $A \subseteq S_k$ dla pewnego $k$ to $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Ostatecznie dla dowolnego $A \in \sigma(\mathcal{R})$ otrzymujemy

$$\mu_1(A) = \sum_k \mu_1(A \cap S_k) = \sum_k \mu_2(A \cap S_k) = \mu_2(A),$$

na mocy przeliczalnej addytywności $\mu_1$ i $\mu_2$. $\diamondsuit$

## 1.8 Miara zewnętrzna

W dalszym ciągu ustalmy dowolny pierścień $\mathcal{R}$ pozbiorów przestrzeni $X$ i addytywną funkcję $\mu$ na tym pierścieniu.

**Definicja 1.8.1** *Dla dowolnego $E \subseteq X$ definujemy*

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_n \mu(R_n) : R_n \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_n R_n\}.$$

*Tak określoną funkcję $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ nazywamy* miarą zewnętrzną pochodzącą *od $\mu$.*

W ogólnym przypadku, gdy $X$ nie pokrywa się ciągiem elementów $\mathcal{R}$, zbiór występujący po prawej stronie wzoru może być pusty — przypomnijmy, że $\inf \emptyset = \infty$.

**Lemat 1.8.2** *Funkcja zbioru $\mu^*$ zdefiniowana w 1.8.1 ma następujące własności:*

*(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$.*

*(b) Jeżeli $E_1 \subseteq E_2 \subseteq X$ to $\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2)$.*

*(c) Dla dowolnych $E_n \subseteq X$ $\mu^*(\bigcup_n E_n) \leqslant \sum_n \mu^*(E_n)$.*

*Dowód.* (a) wynika z faktu, że $\mu(\emptyset) = 0$, natomiast (b) z uwagi, że $\inf A \geqslant \inf B$ dla $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Nierówność w (c) jest oczywista gdy $\mu^*(E_n) = \infty$ dla pewnego $n$. Załóżmy wobec tego, że $\mu^*(E_n) < \infty$ dla wszystkich $n$. Wtedy dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieją $R^n_k \in \mathcal{R}$, takie że

$$E_n \subseteq \bigcup_k R^n_k \quad \text{oraz} \quad \sum_k \mu(R^n_k) \leqslant \mu^*(E_n) + \varepsilon/2^n.$$

Wtedy

$$\bigcup_n E_n \subseteq \bigcup_{n,k} R^n_k,$$

$$\mu^*\left(\bigcup_n E_n\right) \leqslant \sum_{n,k} (\mu^*(E_n) + \varepsilon/2^n) = \sum_n \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

co dowodzi tezy. $\diamondsuit$

Warunek 1.8.2(b) nazywany jest monotonicznością a warunek 1.8.2(c) to przeliczalna podaddytywność. Czasami dowolną funkcję $\mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, niekoniecznie zdefiniowaną wzorem 1.8.1, która jest monotoniczna i przeliczalnie podaddytywna (oraz znika na $\emptyset$) nazywa się miarą zewnętrzną; ta ogólność nie będzie nam potrzebna. Idea miary zewnętrznej polega na mierzeniu dowolnych zbiorów " od zewnątrz", przez pokrywanie ich ciągami zbiorów z miarą już określoną.

Miara zewnętrzna zadana przez 1.8.1 nie jest na ogół przeliczalnie addytywna na rodzinie wszystkich podzbiorów $X$, patrz na przykład Zadania 1.10.37 i następne. Jak się jednak okaże, $\mu^*$ jes przeliczalnie addytywna na $\sigma(\mathcal{R})$.

## 1.9 Dowód twierdzenia o konstrukcji miary

Podstawowy pomysl wykorzystywany w dowodzie pochodzi od Caratheodory'ego i opiera się na tym, że można zdefiniować pewne $\sigma$-ciało zawierające wyjściowy pierścień i na tym $\sigma$-ciele miara zewnętrzna jest przeliczalnie addytywna.

**Definicja 1.9.1** *Mówimy, że zbiór $A \subseteq X$ jest mierzalny względem miary zewnętrznej $\mu^*$ jeżeli*

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap A^c),$$

*dla dowolnego zbioru $Z \subseteq X$. Oznaczmy przez $\mathfrak{M}(\mu^*)$ rodzinę wszystkich mierzalnych podzbiorów $X$.*

Zauważmy, że w warunku definiującym mierzalność tylko nierówność "$\geqslant$" jest istotna — nierówność przeciwna wynika z zależności $Z = (Z \cap A) \cup (Z \cap A^c)$ i (przeliczalnej) podaddytywności miary zewnętrznej. Zauważmy też, że każdy zbiór $A$ spełniający warunek $\mu^*(A) = 0$ jest mierzalny.

Poniżej udowodnimy, że $\mathfrak{M}(\mu^*)$ jest $\sigma$-ciałem zawierającym wyjściowy pierścień, a miara zewnętrzna jest przeliczalnie addytywna na tym $\sigma$-ciele i zgadza się z $\mu$ na $\mathcal{R}$. Zauważmy, że to automatycznie dowodzi Twierdzenia 1.4.2.

**Lemat 1.9.2** *Rodzina $\mathfrak{M}(\mu^*)$ jest ciałem zbiorów.*

*Dowód.* Mamy $\emptyset \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ ponieważ wzór w 1.9.1 jest spełniony dla $A = \emptyset$. Jeśli $A \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ to $A^c \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ bo warunek 1.9.1 jest taki sam dla zbioru $A$, jak i dla jego dopełnienia $A^c$. Rozważmy $A, B \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ i dowolny $Z \subseteq X$. Wtedy, testując mierzalność zbioru $A$ zbiorem $Z$, a nastepnie mierzalność zbioru $B$ zbiorem $Z \cap A$, otrzymamy

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap A^c) = \mu^*(Z \cap A \cap B) + \mu^*(Z \cap A \cap B^c) + \mu^*(Z \cap A^c) \geqslant$$
$$\geqslant \mu^*(Z \cap A \cap B) + \mu^*(Z \cap (A \cap B)^c),$$

gdzie w drugiej linii korzystamy z tego że

$$(Z \cap A \cap B^c) \cup (Z \cap A^c) \supseteq Z \cap (A^c \cup B^c) = Z \cap (A \cap B)^c,$$

oraz podaddytywności $\mu^*$. W ten sposób dowiedliśmy $A \cap B \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, jako że przeciwna nierówność jest zawsze prawdziwa. Tym samym $\mathfrak{M}(\mu^*)$ jest rodziną zamkniętą na dopełnienia i przekroje, a więc jest ciałem. $\diamondsuit$

**Lemat 1.9.3** *Dla dowolnych parami rozłącznych zbiorów $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ i dowolnego $Z \subseteq X$ zachodzi wzór*

$$\mu^*(Z \cap \bigcup_{i \leqslant n} A_i) = \sum_{i \leqslant n} \mu^*(Z \cap A_i);$$

*w szczególności $\mu^*$ jest addytywną funkcją na $\mathfrak{M}(\mu^*)$.*

*Dowód.* Dla dwóch rozłącznych zbiorów $A_1, A_2$ otrzymujemy tezę, testując mierzalność zbioru $A_1$ zbiorem $Z' = Z \cap (A_1 \cup A_2)$ bo $Z' \cap A_1 = Z \cap A_1$ i $Z' \cap A_1^c = Z \cap A_2$; rozszerzenie wzoru na $n$ składników wymaga jedynie prostej indukcji. Addytywność $\mu^*$ otrzymujemy podstawiając $Z = X$. $\diamondsuit$

**Twierdzenie 1.9.4** *Rodzina $\mathfrak{M}(\mu^*)$ jest $\sigma$-ciałem zwierającym $\mathcal{R}$, a $\mu^*$ jest przeliczalnie addytywna na $\mathfrak{M}(\mu^*)$. Zachodzi wzór $\mu(R) = \mu^*(R)$ dla $R \in \mathcal{R}$.*

*Dowód.* Sprawdzimy, że $\mathfrak{M}(\mu^*)$ jest $\sigma$-ciałem. Ponieważ $\mathfrak{M}(\mu^*)$ jest ciałem (Lemat 1.9.2) więc wystarczy sprawdzić, że $\mathfrak{M}(\mu^*)$ jest rodziną zamkniętą na rozłączne przeliczalne sumy. Niech $A_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ będzie ciągiem parami rozłącznych zbiorów i $A = \bigcup_n A_n$. Wtedy dla dowolnego $Z$ i $n$ mamy na mocy 1.9.3

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap \bigcup_{i \leqslant n} A_i) + \mu^* \left( Z \cap \left( \bigcup_{i \leqslant n} A_i \right)^c \right) \geqslant \sum_{i \leqslant n} \mu^*(Z \cap A_i) + \mu^*(Z \cap A^c).$$

Stąd, wykorzystując przeliczalną podaddytywność $\mu^*$,

$$\mu^*(Z) \geqslant \sum_n \mu^*(Z \cap A_n) + \mu^*(Z \cap A^c) \geqslant \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap A^c).$$

To dowodzi, że $A \in \mathfrak{M}(\mu^*)$. Miara zewnętrzna $\mu^*$ jest przeliczalnie addytywna na $\mathfrak{M}(\mu^*)$ jako funkcja jednocześnie przeliczalnie podaddytywna i addytywna (por. Lemat 1.9.3 i 1.8.2).

Niech $R \in \mathcal{R}$. Aby pokazać, że $R \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ rozważmy dowolny $Z$. Jeżeli $\mu^*(Z) = \infty$ to automatycznie $\mu^*(Z) \geqslant \mu^*(Z \cap R) + \mu^*(Z \cap R^c)$. Jeżeli $\mu^*(Z) < \infty$ to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg parami rozłącznych zbiorów $R_n \in \mathcal{R}$ taki że $Z \subseteq \bigcup_n R_n$ i $\mu^*(Z) \leqslant \sum_n \mu(R_n) + \varepsilon$. Wtedy

$$\mu^*(Z \cap R) + \mu^*(Z \cap R^c) \leqslant \sum_n \mu(R_n \cap R) + \sum_n \mu(R_n \cap R^c) = \sum_n \mu(R_n) \leqslant \mu^*(Z) + \varepsilon,$$

co dowodzi nierówności $\mu^*(Z\cap R)+\mu^*(Z\cap R^c)\leqslant\mu^*(Z)$, a więc $R\in\mathfrak{M}(\mu^*)$.

Dla $R\in\mathcal{R}$ mamy $\mu^*(R)\leqslant\mu(R)$ z definicji $\mu^*$. Jeśli $R\subseteq\bigcup_n R_n$ dla pewnego ciągu parami rozłącznych zbiorów $R_n\in\mathcal{R}$ to

$$\mu(R)=\mu(R\cap\bigcup_n R_n)=\sum_n\mu(R\cap R_n)\leqslant\mu^*(R),$$

gdzie stosujemy przeliczalną addytywność $\mu$ na $\mathcal{R}$. $\diamondsuit$

Można się na koniec zastanawiać, jaka jesr różnica pomiędzy $\mathfrak{M}(\mu^*)$ i $\sigma(\mathcal{R})$. Otóż pierwsze $\sigma$-ciało jest uzupełnieniem tego drugiego. Wyjaśnia to, że nasza wyjściowa definicja podzbioru prostej mierzalnego w sensie Lebesgue'a zgadza się z definicją mierzalności zadaną poprzez warunek Caratheodory'ego. Dowód końcowego faktu przebiega podobnie do poprzednich rozważań i zostanie pominięty.

**Lemat 1.9.5** *Dla każdego $A\in\mathfrak{M}(\mu^*)$ istnieją $B_1,B_2\in\sigma(\mathcal{R})$, takie że $B_1\subseteq A\subseteq B_2$ i $\mu^*(B_2\setminus B_1)=0$. W szczególności $\widehat{\sigma(\mathcal{R})}=\mathfrak{M}(\mu^*)$.*

## 1.10 Zadania

### Rodziny zbiorów

**1.10.1** Niech $\mathcal{R}$ będzie pierścieniem zbiorów. Zauważyć, że jeśli $A, B \in \mathcal{R}$ to $A \triangle B \in \mathcal{R}$ i $A \cap B \in \mathcal{R}$. Sprawdzić, że $(\mathcal{R}, \triangle, \cap)$ jest także pierścieniem w sensie algebraicznym, w szczególności, że działanie $\triangle$ jest łączne i $\bigcap$ jest rozdzielne względem $\triangle$.

**1.10.2** Niech $\mathcal{F}$ będzie taką rodziną podzbiorów $X$, że $X \in \mathcal{F}$ oraz $A \setminus B \in \mathcal{F}$ dla $A, B \in \mathcal{F}$. Sprawdzić, że $\mathcal{F}$ jest ciałem.

**1.10.3** Zauważyć, że przekrój dowolnej ilości pierścieni, ciał... jest pierścieniem, ciałem itp.

**1.10.4** Zauważyć, że jeśli $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ to $\alpha(\mathcal{F}) \subseteq \alpha(\mathcal{G})$, gdzie $\alpha$ oznacza jeden z symboli generowania $r, s, a, \sigma$.

**1.10.5** Niech $\mathcal{G}$ będzie rodziną wszystkich skończonych podzbiorów $X$. Opisać $r(\mathcal{G})$, $s(\mathcal{G})$, $a(\mathcal{G})$ i $\sigma(\mathcal{G})$.

**1.10.6** Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ będzie ciałem zbiorów i niech $Z \subseteq X$. Wykazać, że

$$a(\mathcal{A} \cup \{Z\}) = \{(A \cap Z) \cup (B \cap Z^c) : \ A, B \in \mathcal{A}\}.$$

**1.10.7** Zauważyć, że jeżeli $\mathcal{C}$ jest taką rodziną podzbiorów $X$ że $X = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$ dla pewnych $C_n \in \mathcal{C}$ to $s(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

**1.10.8** Zauważyć, że rodzina, która jest jednocześnie pierścieniem i klasą monotoniczną jest $\sigma$-pierścieniem.

**1.10.9** Sprawdzić, że jeśli $\mathcal{A}$ jest ciałem zbiorów i rodzina $\mathcal{A}$ jest zamknięta na **rozłączne** przeliczalne sumy to $\mathcal{A}$ jest $\sigma$–ciałem.

**1.10.10** Niech $\mathcal{A}$ bedzie skończonym ciałem zbiorów. Udowodnić, że $|\mathcal{A}| = 2^n$ dla pewnej liczby naturalnej $n$. Wskazówka: wymyśleć, co to jest $n$,

**1.10.11** Niech $\mathcal{F}$ będzie przeliczalną rodziną zbiorów. Udowodnić, że ciało $a(\mathcal{F})$ jest przeliczalne.

**1.10.12** Udowodnić, że jeśli $\mathcal{A}$ jest nieskończonym $\sigma$–ciałem to $\mathcal{A}$ ma przynajmniej $\mathfrak{c}$ elementów. Wskazówka: Wykazać, że w każdym nieskończonym $\sigma$-ciele istnieje ciąg niepustych parami rozłącznych zbiorów; skorzystać z tego, że $\mathfrak{c}$ jest mocą $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

### Funkcje zbioru

**1.10.13** Niech $\mu$ będzie skończoną addytywną funkcją zbioru, określoną na pierścieniu $\mathcal{R}$. Sprawdzić, że (dla dowolnych $A, B, C \in \mathcal{R}$)

*(i)* $|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \mu(A \triangle B)$;

*(ii)* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$;

*(iii)* $\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$.

Jak będzie wyglądał analogiczny wzór dla 4, 5... zbiorów?

**1.10.14** Sprawdzić, że dla funkcji $\mu$ z poprzedniego zadania, warunek $A \sim B \iff \mu(A \triangle B) = 0$ określa relację równoważności na $\mathcal{R}$.

**1.10.15** Niech $X$ będzie zbiorem skończonym. Sprawdzić, że wzór $\mu(A) = \frac{|A|}{|X|}$ określa miarę probabilistyczną na $\mathcal{P}(X)$.

**1.10.16** Niech $(x_n) \subseteq X$ będzie ustalonym ciągiem i niech $(c_n)$ będzie ciągiem liczb nieujemnych. Wykazać, że wzór

$$\mu(A) = \sum_{n: x_n \in A} c_n$$

określa miarę na $\mathcal{P}(X)$ (w razie trudności rozważyć ciąg skończony $x_1, \ldots, x_n$). Kiedy taka miara jest skończona?

**1.10.17** Zauważyć, że $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest $\sigma$–ciałem generowanym przez singletony. Wykazać, że każda miara na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest postaci opisanej w poprzednim zadaniu.

**1.10.18** Niech $\mu$ będzie miarą na $\sigma$–ciele $\mathcal{A}$ i niech $A_n \in \mathcal{A}$. Zakładając, że $\mu(A_n \cap A_k) = 0$ dla $n \neq k$, wykazać że

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

**1.10.19** Uzupełnić szczegóły dowodu Twierdzenia 1.5.5 w następujący sposób: Dla przestrzeni miarowej $(X, \Sigma, \mu)$ zdefiniujmy $\widehat{\Sigma}$ jako rodzinę zbiorów postaci $A \triangle N$, gdzie $A \in \Sigma$, $N \subseteq B$ dla pewnego $B \in \Sigma$ miary zero. Wtedy $\widehat{\Sigma}$ jest $\sigma$-ciałem, a wzór $\widehat{\mu}(A \triangle N) = \mu(A)$ definiuje poprawnie przedłużenie miary $\mu$ z $\Sigma$ na $\widehat{\Sigma}$.

**Na prostej; miara Lebesgue'a**

**1.10.20** Niech $\mathcal{R}$ będzie pierścieniem na prostej rzeczywistej, generowanym przez przedziały postaci $[a, b)$. Sprawdzić, że $A \in \mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy $A$ jest rozłączną skończoną sumą takich przedziałów.

**1.10.21** Wykazać, że rodzina podzbiorów $\mathbb{R}$ postaci

$$(F_1 \cap V_1) \cup \ldots \cup (F_k \cap V_k),$$

gdzie $F_i$ są domknięte, $V_i$ są otwarte, $k \in \mathbb{N}$, jest ciałem.

**1.10.22** Sprawdzić, że $\sigma$–ciało $Bor(\mathbb{R})$ jest generowane przez każdą z rodzin

*(i)* odcinki otwarte o końcach wymiernych;

*(ii)* odcinki domknięte;

*(iii)* półproste postaci $(-\infty, a]$;

*(iv)* półproste postaci $(a, \infty)$;

*(v)* odcinki domknięte o końcach wymiernych.

**1.10.23** Sprawdzić, że

*(i)* $\lambda(A) = 0$ dla każdego zbioru skończonego $A$;
*(ii)* $\lambda[a,b] = \lambda(a,b) = b - a$ dla $a < b$;
*(iii)* $\lambda(U) > 0$ dla każdego zbioru otwartego $U \neq \emptyset$;
*(iv)* $\lambda(A) = 0$ dla każdego zbioru przeliczalnego $A$.

**1.10.24** Podać przykład zbioru mierzalnego $A$, takiego że

*(i)* $\lambda(A) = 1$ i $A$ jest nieograniczonym zbiorem otwartym;
*(ii)* $\lambda(\mathrm{int}(A)) = 1$, $\lambda(A) = 2$, $\lambda(\overline{A}) = 3$;
*(iii)* $\lambda(A) = 0$ i $A \subseteq [0,1]$ jest zbiorem nieprzeliczalnym.

Uwaga: $\mathrm{int}(A)$ oznacza wnętrze zbioru, czyli największy zbiór otwarty zawarty w $A$.

**1.10.25** Skonstruować, dla ustalonego $\varepsilon > 0$, zbiór domknięty $F \subseteq [0,1]$ o wnętrzu pustym, dla którego $\lambda(F) > 1 - \varepsilon$.

I sposób: Zmodyfikować konstrukcję zbioru Cantora.

II sposób: Niech $(q_n)_n$ będzie ciągiem liczb wymiernych z $[0,1]$. Rozważyć zbiór otwarty $V = \bigcup_{n=1}^{\infty}(q_n - \varepsilon 2^{-n}, q_n + \varepsilon 2^{-n})$ przy odpowiednim doborze $\varepsilon > 0$.

**1.10.26** Zauważyć, że dla każdego zbioru $M \in \mathfrak{L}$, jeśli $\lambda(M) < \infty$ to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ograniczony zbiór mierzalny $M_0 \subseteq M$, taki że $\lambda(M \setminus M_0) < \varepsilon$.

**1.10.27** Wykazać, że istnieje zbiór domknięty $F \subseteq [0,1]$ miary dodatniej złożony z liczb niewymiernych.

**1.10.28** Dla $B \subseteq \mathbb{R}$ i $x \neq 0$, niech $xB$ oznacza zbiór $\{xb : \ b \in B\}$ (czyli jednokładność zbioru $B$).

Sprawdzić, że takie przeskalowanie zbioru otwartego jest otwarte i że rodzina tych $B \in Bor(\mathbb{R})$ dla których $xB \in Bor(\mathbb{R})$ dla każdego $x \neq 0$ jest $\sigma$-ciałem. Wyciągnąć stąd wniosek, że dla każdego $B \in Bor(\mathbb{R})$ i $x$ mamy $xB \in Bor(\mathbb{R})$ (tzn. że $\sigma$–ciało $Bor(\mathbb{R})$ jest niezmiennicze na jednokładność).

**1.10.29** Wykazać, że $\lambda(xB) = x\lambda(B)$ dla każdego zbioru borelowskiego $B$ i $x > 0$. Rozszerzyć ten rezultat na zbiory mierzalne.

**1.10.30** Udowodnić, że dla dowolnego zbioru mierzalnego $M$ miary skończonej i $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór postaci $I = \bigcup_{i \leqslant n}(a_i, b_i)$, taki że $\lambda(M \triangle I) < \varepsilon$, przy czym $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$.

### Własności miar

**1.10.31** Niech $(X, \Sigma, \mu)$ będzie skończoną przestrzenią miarową. Wykazać, że jeżeli $A_n \in \Sigma$ i dla każdego $n$ zachodzi nierówność $\mu(A_n) \geqslant \delta > 0$, to istnieje $x \in X$, taki że $x \in A_n$ dla nieskończenie wielu $n$.

**1.10.32** Udowodnić, że jeśli $(A_n)$ jest ciągiem zbiorów z $\sigma$–ciała, na którym określona jest skończona miara $\mu$, to jeśli $(A_n)$ jest zbieżny do $A$ to $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$. Czy skończoność miary jest istotna?

**1.10.33** Niech $(X, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią miarową. Zbiór $T \in \Sigma$ jest atomem miary $\mu$ jeśli $\mu(T) > 0$ i dla każdego $A \in \Sigma$ jeśli $A \subseteq T$ to $\mu(A) = 0$ lub $\mu(A) = \mu(T)$. Mówimy, że miara $\mu$ jest **bezatomowa** jeśli nie ma atomów.

Sprawdzić, że miara Lebesgue'a jest bezatomowa. Zauważyć, że inne miary rozważane do tej pory miały atomy.

**1.10.34** Udowodnić, że skończona miara bezatomowa $\mu$ na $\Sigma$ ma następującą własność Darboux: dla każdego $A \in \Sigma$ i $0 \leqslant r \leqslant \mu(A)$ istnieje $B \in \Sigma$, taki że $B \subseteq A$ i $\mu(B) = r$.

Wskazówka: Niech $\mu(X) = 1$; sprawdzić, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i $A \in \Sigma$ jeśli $\mu(A) > 0$ to istnieje $B \in \Sigma$, że $B \subseteq A$ i $0 < \mu(B) < \varepsilon$. Następnie sprawdzić, że $X$ jest rozłączną sumą zbiorów $A_n$ o własności $0 < \mu(A_n) < \varepsilon$. To rozumowanie pokaże, że zbiór wartości $\mu$ jest gęsty w $[0, 1]$; potem już blisko do celu.

**Ideały i miary zewnętrzne**

**1.10.35** Niepustą rodzinę $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy $\sigma$–ideałem jeśli $A \subseteq B$ i $B \in \mathcal{J}$ implikuje $A \in \mathcal{J}$ oraz $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{J}$ jeśli $A_n \in \mathcal{J}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Podaj znane Ci przykłady $\sigma$–ideałów na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$.

**1.10.36** Niech $\mathcal{J}$ będzie $\sigma$–ideałem na $X$. Opisać $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{J})$ (rozważyć przypadki $X \in \mathcal{J}, X \notin \mathcal{J}$). Zdefiniować na $\mathcal{A}$ zerojedynkową miarę $\mu$, analogicznie jak w przykładzie z rozdziału 1.2.

**1.10.37** Niech $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ będzie $\sigma$–ideałem nie zawierającym $X$. Na $a(\mathcal{J})$ definiujemy addytywną, zerojedynkową funkcję zbioru $\mu$ (por. zadanie poprzednie). Określić miarę zewnętrzną za pomocą $\mu$ i scharakteryzować rodzinę zbiorów mierzalnych.

**1.10.38** Niech $\{A_1, A_2, \ldots\}$ będzie partycją przestrzeni $X$ na zbiory niepuste.

*(i)* Opisać ciało $\mathcal{A}$ generowane przez zbiory $A_n$, $n \in \mathbb{N}$.

*(ii)* Na $\mathcal{A}$ określamy addytywną funkcję $\mu$, tak aby $\mu(A_n) = 2^{-n}$ i $\mu(X) = 1$. Jak można opisać $\sigma$–ciało zbiorów mierzalnych względem miary zewnętrznej pochodzącej od $\mu$? (patrz Definicja 1.9.1)

**1.10.39** Niech $X = [0, 1) \times [0, 1]$ i niech $\mathcal{R}$ będzie ciałem w $X$ generowanym przez cylindry postaci $[a, b) \times [0, 1]$. Na $\mathcal{R}$ rozważamy funkcję zbioru, taką że $\mu([a, b) \times [0, 1]) = b - a$ dla $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Jak wyglądają (z grubsza...) zbiory $\mu^*$–mierzalne? (patrz Definicja 1.9.1). Zauważyć, że w $X$ można wskazać **wiele** parami rozłącznych zbiorów $E$ niemierzanych, takich że $\mu^*(E) = 1$.

**1.10.40** Niech $\mathcal{R}$ będzie pierścieniem podzbiorów $\mathbb{Q}$ generowanym przez zbiory postaci $\mathbb{Q} \cap [a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Sprawdzić, że na $\mathcal{R}$ można określić addytywną funkcję $\nu$, tak że $\nu(\mathbb{Q} \cap [a, b)) = b - a$ dla $a < b$. Udowodnić, że $\nu$ nie jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{R}$ i obliczyć $\nu^*(\mathbb{Q})$.

**1.10.41** Zauważyć, że we wzorze na $\lambda^*$ można zastąpić odcinki postaci $[a, b)$ przez odcinki postaci $(a, b)$ (lub $[a, b]$). Stąd bezpośrednio wynika możliwość przybliżania od góry zbiorami otwartymi.

## 1.11 Problemy

**1.11.A** Udowodnić, że suma dowolnej (nawet nieprzeliczalnej) rodziny przedziałów na prostej, postaci $[a,b]$, $a<b$, jest zbiorem borelowskim.

**1.11.B** Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $X$, $|X|\leqslant\mathfrak{c}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje w $\mathcal{P}(X)$ przeliczalna rodzina zbiorów $\mathcal{F}$, taka że $\sigma(\mathcal{F})$ zawiera wszystkie punkty.

**1.11.C** Niech $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(X)$ będzie rodziną mocy $\leqslant\mathfrak{c}$. Udowodnić, że $|\sigma(\mathcal{F})|\leqslant\mathfrak{c}$. Wywnioskować stąd, że $|Bor(\mathbb{R})|=\mathfrak{c}$ i że istnieją nieborelowskie zbiory na prostej.

Uwaga: tutaj potrzebna jest indukcja pozaskończona.

**1.11.D** Udowodnić, że funkcja zbioru $\lambda$ zdefiniowana na pierścieniu generowanym przez odcinki postaci $[a,b)$ (przez warunek $\lambda([a,b))=b-a$ dla $a<b$) jest ciągła z góry na zbiorze $\emptyset$ (a więc jest przeliczalnie addytywna). Wskazówka: Zbiory postaci $\bigcup_{i=1}^{n}[c_i,d_i]$ są zwarte i (w pewnym sensie) przybliżają zbiory z $\mathcal{R}$ od środka.

**1.11.E** Niech $(X,\Sigma,\mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną i niech $A_1,\ldots,A_{2009}\in\Sigma$ będą zbiorami o własności $\mu(A_i)\geqslant 1/2$. Wykazać, że istnieje $x\in X$, taki że $x\in A_i$ dla przynajmniej 1005 wartości $i$.

**1.11.F** Przeprowadzić następującą konstrukcję zbioru Vitali'ego: Dla $x,y\in[0,1)$, niech $x\sim y\iff x-y\in\mathbb{Q}$. Sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności. Niech $Z$ będzie zbiorem, który z każdej klasy abstrakcji tej relacji wybiera dokładnie jeden element. Sprawdzić, że $\bigcup_{q\in\mathbf{Q}}(Z\oplus q)=[0,1)$, gdzie $\oplus$ oznacza dodawanie mod 1.

Zauważyć, że $\lambda$ jest niezmiennicza na $[0,1)$ względem działania $\oplus$; wywnioskować stąd, że powyższy zbiór $Z$ nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

**1.11.G** Skonstruować zbiór borelowski $B\subseteq\mathbb{R}$, taki że $\lambda(B\cap I)>0$ i $\lambda(B^c\cap I)>0$ dla każdego niepustego odcinka otwartego $I$.

**1.11.H** Udowodnić twierdzenie Steinhausa: Jeśli $A\subseteq\mathbb{R}$ jest mierzalny i $\lambda(A)>0$ to zbiór $A-A$ (różnica kompleksowa) zawiera odcinek postaci $(-\delta,\delta)$ dla pewnego $\delta>0$.

Wskazówka: Można założyć, że $\lambda(A)<\infty$; pokazać najpierw że istnieje taki niepusty odcinek $I$, że $\lambda(A\cap I)\geqslant\frac{3}{4}\lambda(I)$.

**1.11.I** Niech $A\subseteq\mathbb{R}$ będzie takim zbiorem mierzalnym, że $\lambda(A\triangle(x+A))=0$ dla każdej liczby wymiernej $x$. Udowodnić, że $\lambda(A)=0$ lub $\lambda(\mathbb{R}\setminus A)=0$.

Wskazówka: Twierdzenie Steinhausa.

**1.11.J** (Wymaga indukcji pozaskończonej.) Skonstruować zbiór Bernsteina $Z\subseteq[0,1]$, czyli taki zbiór, że

$$Z\cap P\neq\emptyset,\quad P\setminus Z\neq\emptyset,$$

dla dowolnego zbioru domkniętego nieprzeliczalnego $P\subseteq[0,1]$. Zauważyć, że $Z$ nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, a nawet $\lambda^*(Z)=\lambda^*([0,1]\setminus Z)=1$.

WSKAZÓWKA: Wszystkie zbiory $P$ domknięte nieprzeliczalne można ustawić w ciąg $P_\alpha$, $\alpha < \mathfrak{c}$. Zdefiniować $Z$ jako $\{z_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, gdzie ciąg $z_\alpha$ i pomocniczy ciąg $y_\alpha$ sa takie, że

$$z_\alpha, y_\alpha \in P_\alpha \setminus \{z_\beta, y_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Aby przeprowadzić konstrukcję trzeba wiedzieć lub sprawdzić, że każdy zbiór $P_\alpha$ ma moc $\mathfrak{c}$.

## 1.12 Dodatek o zbiorach dziwnych

*Studentom matematyki należy mówić prawdę,*
*ale cała prawda nie zawsze jest wskazana.*

Cytat powyżej zmyśliłem, ale tego typu opinie słyszałem wielokrotnie podczas swoich studiów. Studenci jednak bywają dociekliwi i już w czasie wykładu obalili moje *metatwierdzenie* o tym, że nie da się wskazać zbioru nieborelowskiego — można faktycznie uznać, że przytoczona[2] konstrukcja Łuzina *wskazuje* zbiór nieborelowski. Z tej inspiracji powstało poniższe uzupełnienie.

Wspomniany przykład Łuzina wiąże się z następującym fenomenem: istnieją funkcje ciągłe $f$ na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (topologicznie rzecz biorąc, jest to przestrzeń $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ z topologią produktową), takie że obraz $f[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]$ nie jest borelowskim podzbiorem prostej. Takie obrazy nazywamy zbiorami analitycznymi — zajmuje się nimi deskryptywna teoria mnogości. Wskazanie stosownego analitycznego zbioru i udowodnienie, ze nie jest on borelowski wymaga pewnej techniki. Jeśli ktoś nie chce czekać to może sam zajrzeć do książki Kechrisa *Modern descriptive set theory*[3]. Ciekawe jest to, że każdy zbiór analityczny na prostej jest jednak mierzalny w sensie Lebesgue'a. Pewne podstawowe wiadomości o obrazach zbiorów przez porządne funkcje zawarte są w zadaniach do rozdziału 2.

Zbiorów niemierzalnych na prostej nie da się *wskazać*, przynajmniej zrobić gołymi rękami — patrz model Solovaya. Jeżeli jednak mamy do dyspozycji poręczny obiekt, na przykład ultrafiltr, to sprawa przedstawia sie dużo lepiej. Przypomnijmy, że $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest ultrafiltrem niegłównym jeżeli zbiory skończone nie należą do $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ jest zamknięty na przekroje i nadzbiory oraz dla każdego podziału $\mathbb{N} = A \cup B$ zachodzi $A \in \mathcal{F}$ lub $B \in \mathcal{F}$. Otóż Sierpiński udowodnił, że mając taki $\mathcal{F}$ możemy zdefiniować niemierzalny zbiór $Z$ wzorem

$$Z = \left\{ \sum_{n \in F} 1/2^n : F \in \mathcal{F} \right\}.$$

Oczywiście samo istnienie ultrafiltru niegłównego wymaga pewnika wyboru. Inne tego typu konstrukcje wspomniane są na końcu rozdziału 4.

Konstrukcja Vitalego pokazuje, ze nie istnieje przedłużenie miary Lebesgue'a do **niezmienniczej** miary określonej na pełnym $\sigma$-ciele $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Ten rezultat został później uogólniony przez Banacha i Ulama: *w zasadzie*[4] nie istnieje przedłużenie miary Lebesgue'a do **jakiejkolwiek** miary mierzącej wszystkie podzbiory prostej. Podstawowa wersja twierdzenia Ulama znajduje się w bardzo przystępnej książce Oxtoby'ego Measure and category.

[2]przez pana Franciszka

[3]chyba nietrudno dotrzeć do tekstu online

[4]to znaczy o ile $\mathfrak{c}$ nie jest liczbą kardynalną słabo nieosiągalną, na przykład gdy $\mathfrak{c} = \aleph_1, \aleph_2, \ldots$

# Rozdział 2

# Funkcje mierzalne

*Licz to, co policzalne, mierz to, co mierzalne,*
*a to, co niemierzalne, uczyń mierzalnym.*
Galileusz

## 2.1 Podstawowe wiadomości

Przypomnijmy, że dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$ i dowolnych zbiorów $A \subseteq X$ oraz $B \subseteq Y$, zbiory $f[A]$ i $f^{-1}[B]$, zdefiniowane jako

$$f[A] = \{f(x) \in Y : x \in A\}, \quad f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\},$$

nazywamy, odpowiednio, *obrazem zbioru $A$ przez funkcję $f$* oraz *przeciwobrazem zbioru $B$ przez funkcję $f$*. Operacja przeciwobrazu zachowuje wszystkie działania mnogościowe, na przykład

$$f^{-1}\left[\bigcap_n B_n\right] = \bigcap_n f^{-1}[B_n],$$

dla dowolnego ciągu zbiorów $B_n \subseteq Y$; por. Zadanie 2.5.1. W przypadku, gdy $B = \{b\}$ piszemy raczej $f^{-1}[b]$ niż $f^{-1}[\{b\}]$, czego nie należy mylić z obliczaniem wartości (potencjalnie istniejącej) funkcji odwrotnej.

Przypomnijmy, że ciągłość funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można wyrazić za pomocą przeciwobrazów zbiorów przez tę funkcję — zbiór $f^{-1}[V]$ jest otwarty dla każdego zbioru otwartego $V \subseteq \mathbb{R}$. Istotnie, jeśli $x_0 \in f^{-1}[V]$ to $y_0 = f(x_0) \in V$, a skoro $V$ jest otwarty to dla pewnego $\varepsilon > 0$ mamy $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon) \subseteq V$. Dobierając teraz $\delta > 0$ jak w warunku Cauchy'ego ciągłości funkcji $f$ w $x_0$, otrzymamy natychmiast $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq f^{-1}[V]$. Nietrudno jest wykazać, że w istocie funkcja $f$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobrazy zbiorów otwartych przez tę funkcję są otwarte; ten ostatni warunek z kolei jest równoważny faktowi, że zbiór $f^{-1}[F]$ jest domknięty dla każdego domkniętego zbioru $F \subseteq \mathbb{R}$ — wynika to tożsamości $\mathbb{R} \setminus f^{-1}[F] = f^{-1}[\mathbb{R} \setminus F]$.

Rozważmy ustaloną przestrzeń miarową $(X, \Sigma, \mu)$ (chwilowo sama miara nie będzie odgrywała żadnej roli). Okazuje się, że odpowiednio "dobre względem $\Sigma$" własności funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ definiuje się następująco.

**Definicja 2.1.1** *Mówimy, że funkcja* $f : X \to \mathbb{R}$ *jest* $\Sigma$–mierzalna, *albo po prostu* mierzalna *jeśli jest jasne jakie* $\sigma$*-ciało mamy na myśli, gdy* $f^{-1}[B] \in \Sigma$ *dla każdego zbioru* $B \in Bor(\mathbb{R})$*.*

Poniższy fakt pozwoli wysłowić mierzalność funkcji w prostszy sposób.

**Lemat 2.1.2** *Niech* $\mathcal{G} \subseteq Bor(\mathbb{R})$ *będzie dowolną rodziną zbiorów, taką że* $\sigma(\mathcal{G}) = Bor(\mathbb{R})$*, Wtedy dla mierzalności funkcji* $f : X \to \mathbb{R}$ *potrzeba i wystarcza, aby* $f^{-1}[G] \in \Sigma$ *dla każdego* $G \in \mathcal{G}$*.*

*Dowód.* Rozważmy rodzinę $\mathcal{A}$ złożoną z tych $B \in Bor(\mathbb{R})$, dla których $f^{-1}[B] \in \Sigma$. Wtedy $\mathcal{A}$ jest $\sigma$-ciałem zbiorów: jeśli $A_n \in \mathcal{A}$ i $A = \bigcup_n A_n$ to wtedy $f^{-1}[A_n] \in \Sigma$ dla każdego $n$ i

$$f^{-1}[A] = \bigcup_n f^{-1}[A_n] \in \Sigma.$$

Jeśli $A \in \mathcal{A}$ to także $A^c \in \mathcal{A}$, ponieważ

$$f^{-1}[A^c] = (f^{-1}[A])^c \in \Sigma.$$

Jako że $\mathcal{A}$ jest $\sigma$-ciałem, z inkluzji $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ wynika $Bor(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}$, czyli $\mathcal{A} = Bor(\mathbb{R})$, co dowodzi dostateczności warunku — jego konieczność jest oczywista. $\diamondsuit$

**Wniosek 2.1.3** *Każdy z poniższych warunków pociąga mierzalność funkcji* $f : X \to \mathbb{R}$*:*

*(i)* $\{x : f(x) < t\} \in \Sigma$ *dla każdego* $t \in \mathbb{R}$*;*

*(ii)* $\{x : f(x) \leqslant t\} \in \Sigma$ *dla każdego* $t \in \mathbb{R}$*;*

*(iii)* $\{x : f(x) > t\} \in \Sigma$ *dla każdego* $t \in \mathbb{R}$*;*

*(iv)* $\{x : f(x) \geqslant t\} \in \Sigma$ *dla każdego* $t \in \mathbb{R}$*.*

*Dowód.* Sprawdzimy dla przykładu dostateczność warunku (i). Niech $\mathcal{G}$ będzie rodziną półprostych $(-\infty, t)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Wtedy $f^{-1}[G] \in \Sigma$ dla $G \in \mathcal{G}$ więc $f$ jest mierzalna, jako że $\mathcal{G}$ generuje $Bor(\mathbb{R})$, patrz Zadanie 1.10.22 $\diamondsuit$

**Wniosek 2.1.4** *Jeśli funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła to jest mierzalna względem* $Bor(\mathbb{R})$*.*

**Przykład 2.1.5** Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest $Bor(\mathbb{R})$-mierzalna nazywamy po prostu funkcją borelowską. Zauważmy, że dla $X = [0, 1]$ lub innego borelowskiego podzbioru prostej możemy rozważyć rodzinę $\{B \in Bor(\mathbb{R}) : B \subseteq X\}$, która jest $\sigma$-ciałem podzbiorów $X$. Takie $\sigma$-ciało będzie oznaczane $Bor(X)$ — przypomnijmy, że w topologii za zbiory otwarte w $X$ uważa się zbiory postaci $U \cap X$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}$ jest otwarty. $\diamondsuit$

**Przykład 2.1.6** Dla dowolnego $A$ z $\sigma$-ciała $\Sigma$ podzbiorów dowolnej przestrzeni $X$ funkcję $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, gdzie $\chi_A(x) = 1$ dla $x \in A$ i $\chi_A(x) = 0$ dla $x \notin A$ nazywamy *funkcją charakterystyczną zbioru* $A$. Taka funkcja jest mierzalna, jako że $\chi_A^{-1}[U]$ jest elementem rodziny $\{\emptyset, A, A^c, X\} \subseteq \Sigma$.

Dla dowolnego $B \in Bor(\mathbb{R})$ funkcja $\chi_B$ jest więc borelowska. Zauważmy, że $\chi_{\mathbb{Q}}$ nie jest ciągła w żadnym punkcie prostej, co pokazuje, że mierzalność jest własnością znacznie ogólniejszą. $\diamondsuit$

W dalszym ciągu pokażemy, że wiele naturalnych operacji przeprowadzanych na funkcjach mierzalnych prowadzi do funkcji mierzalnych.

**Lemat 2.1.7** *Jeżeli funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest $\Sigma$-mierzalna, a funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła to funkcja $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ jest $\Sigma$-mierzalna.*

*Dowód.* Dla dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}$, zbiór $g^{-1}[U]$ jest otwarty na mocy ciągłości $g$; stąd $(g \circ f)^{-1}[U] = f^{-1}[g^{-1}[U]] \in \Sigma$. $\diamondsuit$

**Wniosek 2.1.8** *Jeżeli funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest $\Sigma$-mierzalna to funkcje $c \cdot f$, $f^2$, $|f|$ też są $\Sigma$-mierzalne.*

**Lemat 2.1.9** *Jeżeli funkcje $f, g : X \to \mathbb{R}$ są $\Sigma$-mierzalne to funkcja $f + g$ jest $\Sigma$-mierzalna.*

*Dowód.* Wystarczy wykazać, że dla $h = f + g$ i $t \in \mathbb{R}$ mamy $h^{-1}[(-\infty, t)] \in \Sigma$. Ale

$$\{x \in X : f(x) + g(x) < t\} = \bigcup_{p+q<t, p,q\in\mathbb{Q}} \{x : f(x) < p\} \cap \{x : g(x) < q\}.$$

co nietrudno sprawdzić, korzystając z gęstości zbioru $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$. Zauważmy, że suma mnogościowa w powyższym wzorze jest przeliczalna, patrz Twierdzenie 0.2.4, i dlatego należy do $\Sigma$. $\diamondsuit$

**Wniosek 2.1.10** *Jeżeli funkcje $f, g : X \to \mathbb{R}$ są $\Sigma$-mierzalne to także mierzalne są funkcje $f \cdot g, \max(f, g), \min(f, g)$.*

*Dowód.* Dowód wynika bezpośrednio z rozważań powyżej oraz tożsamości

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2};$$

$$\max(f, g) = \frac{|f-g| + f + g}{2}; \quad \min(f, g) = \frac{-|f-g| + f + g}{2}.$$

$\diamondsuit$

Dodajmy że mierzalność iloczynu $f \cdot g$ można sprawdzić zapisując zbiór postaci

$$\{x : f(x)g(x) < t\}$$

analogicznie jak w dowodzie Lematu 2.1.9.

Czasami wygodnie jest rozważać funkcje postaci $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Naturalnie jest wtedy przyjąć, że $\Sigma$-mierzalność funkcji $f$ oznacza dodatkowo, że zbiory $f^{-1}(-\infty)$ i $f^{-1}(\infty)$ należą do $\Sigma$. Przy takiej umowie możemy dla dowolnego ciągu funkcji mierzalnych $f_n : X \to \mathbb{R}$ zdefiniować, na przykład $\sup_n f_n$, bez konieczności zakładania, że zbiór $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony dla każdego $x \in X$. Podobnie, rozważamy funkcję $f = \limsup_n f_n$, zadaną oczywiście przez $f(x) = \limsup_n f_n(x)$. Występujące tu pojęcie granicy górnej ciągu liczbowego, a także własności granic górnych i dolnych przypomniane są w 2.7.

**Lemat 2.1.11** *Jeżeli funkcje $f_n : X \to \mathbb{R}$ są $\Sigma$-mierzalne to mierzalne są również funkcje*

$$\liminf_n f_n, \limsup_n f_n, \inf_n f_n, \sup_n f_n.$$

*Dowód.* Pokażemy dla przykładu, że funkcja $f = \limsup_n f_n$ jest mierzalna – wynika to bezpośrednio z tożsamości

$$\{x : f(x) = \infty\} = \bigcap_k \bigcap_m \bigcup_{n \geqslant m} \{x : f_n(x) > k\},$$

$$\{x : f(x) \leqslant t\} = \bigcap_k \bigcup_m \bigcap_{n \geqslant m} \{x : f_n(x) < t + 1/k\},$$

i analogicznej formuły dla $-\infty$. Drugi ze wzorów powyżej wynika z faktu, że na to aby $f(x) \leqslant t$ potrzeba i wystarcza, aby dla dowolnej małej liczby postaci $\varepsilon = 1/k$, prawie wszystkie wyrazy ciągu $f_n(x)$ spełniały $f_n(x) < t + 1/k$. $\diamondsuit$

**Wniosek 2.1.12** *Granica punktowa zbieżnego ciągu funkcji mierzalnych jest mierzalna.*

Intuicyjnie rzecz biorąc, każda przeliczalna operacja wykonywana na funkcjach mierzalnych prowadzi do funkcji mierzalnych i na przykład każda funkcja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zapisana "wzorem", w którym występują przeliczalne kwantyfikatory jest borelowska.

**Przykład 2.1.13** Niech $f_n : X \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji $\Sigma$-mierzalnych; sprawdzimy, że zbiór

$$A = \{x : \limsup_n f_n(x) > \liminf_n f_n(x)\} \in \Sigma.$$

W tym celu należy zapisać formalnie warunek definiujący $x \in A$ za pomocą przeliczalnych kwantyfikatorów. Zauważmy, że $x \in A$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją liczby wymierne $p, q$, takie że

$$\limsup_n f_n(x) > p > q > \liminf_n f_n(x).$$

Warunek $\limsup_n f_n(x) > p$ oznacza że dla pewnej liczby postaci $1/m$ nierówność $f_n(x) > p + 1/m$ zachodzi dla nieskończenie wielu $n$; analogiczna uwaga dotyczy warunku $q > \liminf f_n(x)$. Tym samym $x \in A$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$(\exists p, q \in \mathbb{Q}, p > q)(\exists m)(\forall k)(\exists n_1, n_2 \geqslant k) f_{n_1}(x) > p + 1/m, f_{n_2}(x) < q - 1/m,$$

co pozwala napisać

$$A = \bigcup_{p>q} \bigcup_m \bigcap_k \bigcup_{n_1, n_2 > k} \{x : f_{n_1}(x) > p + 1/m\} \cap \{x : f_{n_2}(x) < q - 1/m\} \in \Sigma,$$

(tutaj $p, q \in \mathbb{Q}$, a wszyskie pozostałe zmienne są naturalne). Powyższy przykład ilustruje formalną drogę sprawdzania mierzalności. Oczywiście w tym przykładzie trochę prościej jest sprawdzić, że $X \setminus A \in \Sigma$: zauważmy, że $x \notin A$ oznacza, że ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny, co pozwala zapisać

$$X \setminus A = \bigcap_m \bigcup_k \bigcap_{n_1, n_2 > k} \{x : |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < 1/m\},$$

ponieważ zbieżność ciągu liczbowego jest równoważna warunkowi Cauchy'ego. $\diamondsuit$

Na koniec tej części odnotujemy następujący prosty, ale często wykorzystywany fakt.

**Lemat 2.1.14** *Każda $\Sigma$-mierzalną funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ można zapisać w postaci $f = f^+ - f^-$, różnicy funkcji mierzalnych i nieujemnych.*

*Dowód.* Istotnie, niech $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0)$; wtedy oczywiście $f = f^+ - f^-$, a funkcje $f^+, f^-$ są mierzalne na mocy Wniosku 2.1.10. $\diamondsuit$

## 2.2 Funkcje proste

Dla ustalonego $\sigma$-ciała $\Sigma$ na $X$ możemy zdefiniować dość bogatą rodzinę funkcji mierzalnych $X \to \mathbb{R}$.

**Definicja 2.2.1** *Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy* funkcją prostą *jeśli zbiór wartości $f[X]$ jest skończony.*

Funkcja charakterystyczna $\chi_A$ dowolnego zbioru $A \subseteq X$ jest prosta. W istocie wszystkie funkcje proste są skończonymi kombinacjami liniowymi funkcji charakterystycznych.

**Lemat 2.2.2** *Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy gdy*

$$f = \sum_{i \leqslant n} a_i \chi_{A_i}$$

*dla pewnych liczb $a_i \in \mathbb{R}$ i zbiorów $A_i \subseteq X$. Funkcja prosta jest $\Sigma$-mierzalna wtedy i tylko wtedy gdy $f$ jest kombinacją liniową funkcji charakterystycznych zbiorów z $\Sigma$.*

*Dowód.* Jeżeli $f[X] = \{a_1, \ldots, a_n\}$ to biorąc $A_i = f^{-1}[a_i]$ mamy $f = \sum_{i \leqslant n} a_i \chi_{A_i}$. Na odwrót, dla funkcji postaci $f = \sum_{i \leqslant n} a_i \chi_{A_i}$ jej zbiór wartości zawiera się w skończonym zbiorze złożonym z 0 i wszystkich liczb bedących sumami pewnych elementów zbioru $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Drugie stwierdzenie wynika natychmiast z tych uwag. $\diamondsuit$

Z punktu widzenia opisanego poniżej rodzina funkcji prostych mierzalnych jest dość bogata.

**Twierdzenie 2.2.3** *Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nieujemną, mierzalną względem pewnego $\sigma$-ciała $\Sigma$ podzbiorów $X$. Wtedy istnieje ciąg mierzalnych funkcji prostych $s_n : X \to \mathbb{R}$, taki że*

$$0 \leqslant s_1(x) \leqslant s_2(x) \leqslant \ldots, \quad i \ \lim_n s_n(x) = f(x),$$

*dla każdego $x \in X$. Jeśli ponadto funkcja $f$ jest ograniczona to ciąg $s_n$ można dobrać tak, aby był jednostajnie zbieżny do $f$.*

*Dowód.* Ustalmy $n$ i dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n2^n$ niech

$$A_{n,k} = \{x : \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n}\};$$

wtedy $A_{n,k} \in \Sigma$, jako że funkcja $f$ jest mierzalna. Niech $s_n$ będzie zdefiniowana tak, że

$$s_n(x) = \frac{k-1}{2^n}, \text{ dla } x \in A_{n,k},$$

oraz $s_n(x) = n$ gdy $f(x) > n$. Niewątpliwie funkcje proste $s_n$ zdefiniowane w ten sposób są mierzalne i nieujemne. Jeżeli $x \in A_{n,k}$ dla pewnego $k$ to $s_n(x) = (k-1)/2^n$, natomiast

$$s_{n+1}(x) = (k-1)/2^n \quad \text{lub} \quad s_{n+1}(x) = (2k-1)/2^{n+1},$$

czyli $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x)$.

Dla ustalonego $x$ i $n > f(x)$ mamy $f(x) \geqslant s_n(x) \geqslant f(x) - 1/2^n$, co pokazuje, że $\lim_n s_n(x) = f(x)$. Jeśli $f$ jest ograniczona to $0 \leqslant f(x) - s_n \leqslant 1/2^n$ jednostajnie po $x \in X$, o ile tylko $n$ ogranicza $f[X]$ z góry. $\diamondsuit$

## 2.3 Prawie wszędzie

Dla ustalonej przestrzeni miarowej $(X, \Sigma, \mu)$ i funkcji mierzalnych $f, g : X \to \mathbb{R}$ mówimy, że $f = g$ $\mu$-prawie wszędzie jeżeli $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. W wielu rozważaniach zmiana wartości danej funkcji na zbiorze miary zero nie zmienia jej istotnych własności i dlatego funkcje równe prawie wszędzie można będzie, do pewnego stopnia, utożsamiać. Ale warto pamiętać, że to zależy od punktu widzenia: $\chi_\mathbb{Q} = 0$ $\lambda$-prawie wszędzie, ale $\chi_\mathbb{Q}$ nie jest ciągła w żadnym punkcie prostej.

Ogólniej możemy o dowolnej (ale "mierzalnej") własności $\varphi$ punktów $x \in X$ powiedzieć, że $\varphi(x)$ zachodzi prawie wszędzie jeżeli $\mu(\{x : \neg\varphi(x)\}) = 0$. Taki charakter ma poniższa definicja.

**Definicja 2.3.1** *Ciąg funkcji mierzalnych $f_n : X \to \mathbb{R}$ jest zbieżny $\mu$-prawie wszędzie (albo po prostu prawie wszędzie) do funkcji $f$ jeżeli $\lim_n f_n(x) = f(x)$ dla wszystkich $x$ spoza pewnego zbioru miary zero.*

**Przykład 2.3.2** Niech $X = [0,1]$; rozważmy funkcje $f_n(x) = x^n$. Wtedy $f_n \to 0$ $\lambda$-prawie wszędzie oraz $f_n \to 1$ $\mu$-prawie wszędzie, gdzie $\mu = \delta_1$ jest deltą Diraca. $\diamondsuit$

Przypomnijmy, że dla funkcji określonych na prostej rzeczywistej lub jej podzbiorach naturalne jest rozważać ich mierzalność względem $\sigma$-ciała $Bor(\mathbb{R})$, ale także względem $\sigma$-ciała $\mathfrak{L}$ zbiorów mierzalnych względem miary Lebesgue'a. Funkcje $\mathfrak{L}$-mierzalne bywają też nazywane $\lambda$-mierzalnymi; funkcje $Bor(\mathbb{R})$-mierzalne nazywa się po prostu funkcjami *borelowskimi*. Poniższe twierdzenie jest w pewnym sensie faktem analogicznym do Twierdzenia 1.6.1.

**Twierdzenie 2.3.3** *Dla każdej funkcji $\lambda$-mierzalnej $f$ istnieje funkcja borelowska $g$, taka że $f = g$ $\lambda$-prawie wszędzie.*

*Dowód.* Niech $I_1, I_2, \ldots$ będzie ciągiem zawierającym wszystkie odcinki postaci $(p, q)$, $p, q \in \mathbb{Q}$ (por. Twierdzenie 0.2.4). Dla każdego $n$ zbiór $f^{-1}[I_n]$ jest mierzalny, a więc na mocy Twierdzenia 1.6.1 mamy $A_n \subseteq f^{-1}[I_n] \subseteq B_n$ i $\lambda(B_n \setminus A_n) = 0$ dla pewnych zbiorów borelowskich $A_n, B_n$. Tym samym $f^{-1}[I_n] = A_n \cup Z_n$, gdzie $Z_n$ jest miary zero. Niech $Z = \bigcup_n Z_n$; wtedy $\lambda(Z) = 0$ i istnieje zbiór borelowski $C$, taki że $Z \subseteq C$ i $\lambda(C) = 0$. Zdefiniujmy funkcję $g$ tak że $g(x) = f(x)$ dla $x \notin C$ oraz $g(x) = 0$ dla $x \in C$. Wtedy $g = f$ prawie wszędzie. Ponadto

$$g^{-1}[I_n] = A_n \setminus C \quad \text{gdy } 0 \notin I_n;$$

$$g^{-1}[I_n] = A_n \cup C \quad \text{gdy } 0 \notin I_n;$$

co w szczególności oznacza, że $g^{-1}[I_n] \in Bor(\mathbb{R})$. Stąd i z Lematu 2.1.2 wynika, że $g$ jest funkcją borelowską. $\diamondsuit$

## 2.4 Zbieżność ciągów funkcyjnych

Jak wynika z Twierdzenia 2.2.3 każda funkcja mierzalna jest granicą punktową ciągu funkcji prostych, a każda funkcja mierzalna ograniczona jest jednostajną granicą ciągu takich funkcji (tutaj dla funkcji niekoniecznie nieujemnych należy zastosować jeszcze Lemat 2.1.14). Jak się za chwile przekonamy, za pomocą miary można definiować i głebiej analizować różne rodzaje zbieżności ciągów funkcyjnych.

Ciąg funkcji $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ jest dobrze znanym przykładem punktowo zbieżnego ciągu funkcji, który nie jest zbieżny jednostajnie. Zauważmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ ciąg $f_n$ zbiega jednostajnie do zera na odcinku $[0, 1-\varepsilon]$. Można więc powiedzieć, że usunięcie zbioru małej miary poprawia zbieżność ciągu. To zjawisko ma charakter bardzo ogólny, o czym mówi tak zwane twierdzenie Jegorowa.

**Twierdzenie 2.4.1** *Jeżeli $(X, \Sigma, \mu)$ jest skończoną przestrzenią miarową, a $f_n : X \to \mathbb{R}$ jest ciągiem funkcji mierzalnych zbieżnym prawie wszędzie do funkcji $f$ to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $A \in \Sigma$, taki że $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ i ciąg $f_n$ jest jednostajnie zbieżny do $f$ na zbiorze $X \setminus A$.*

*Dowód.* Załóżmy po prostu, że $f(x) = \lim_n f_n(x)$ dla każdego $x \in X$ — w ogólnym przypadku zbiór punktów, w których ciąg nie jest zbieżny jest miary zero i można go usunąć z dalszych rozważań. Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ rozważamy zbiory

$$E(m,n) = \bigcap_{i=n}^{\infty} \{x : |f_i(x) - f(x)| < 1/m\}.$$

Wtedy $E(m,1) \subseteq E(m,2) \subseteq \ldots$ dla każdego $m$ oraz

$$\bigcup_n E(m,n) = X,$$

co wynika z tego, że $f_n(x) \to f(x)$, czyli że dla każdego $x$ istnieje $n$, że $|f_i(x) - f(x)| < 1/m$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$; ponieważ $E(m,n) \uparrow X$ więc $X \setminus E(m,n) \downarrow \emptyset$ i, korzystając z ciągłości miary skończonej na zbiorze pustym, dla każdego $m$ istnieje $n_m$, takie że

$$\mu(X \setminus E(m, n_m)) < \varepsilon/2^m.$$

Wtedy, kładąc

$$A = \bigcup_m (X \setminus E(m, n_m)), \qquad \text{mamy;}$$

$$\mu(A) \leqslant \sum_m \mu(X \setminus E(m, n_m)) \leqslant \sum_m \varepsilon/2^m = \varepsilon.$$

Ponadto $|f_n(x) - f(x)| < 1/m$ dla $n > n_m$ i $x \notin A$, co oznacza jednostajną zbieżność $f_n$ na $X \setminus A$. $\diamondsuit$

Założenie $\mu(X) < \infty$ w twierdzeniu Jegorowa jest istotne: ciąg funkcji $f_n(x) = x/n$ na prostej zbiega punktowo do zera i nie jest zbieżny jednostajnie na żadnym nieograniczonym podzbiorze prostej. Dla potrzeb licznych zastosowań Twierdzenia 2.4.1 wprowadza się następującą definicję.

**Definicja 2.4.2** *Mówimy, że ciąg funkcji mierzalnych jest* niemal jednostajnie zbieżny *jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ ciąg $f_n$ zbiega jednostajnie na dopełnieniu pewnego zbioru miary $< \varepsilon$.*

Wprowadzimy teraz inne ważne pojęcie zbieżności ciągów funkcyjnych: zbieżność według miary.

**Definicja 2.4.3** *Ciąg $f_n : X \to \mathbb{R}$ funkcji mierzalnych jest* zbieżny do funkcji $f$ według miary *jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0.$$

Piszemy $f_n \xrightarrow{\mu} f$, aby odnotować zbieżność według miary $\mu$.

**Wniosek 2.4.4** *Ciąg funkcyjny zbieżny niemal jednostajnie jest zbieżny według miary. W szczególności, ciąg funkcyjny zbieżny prawie wszędzie na przestrzeni o mierze skończonej jest zbieżny według miary.*

*Dowód.* Jeżeli funkcje $f_n$ zbiegają do $f$ niemal jednostajnie to (w szczególności) dla dowolnego $\varepsilon$ istnieje zbiór $A$, taki że $\mu(A) < \varepsilon$ i $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dla dużych $n$ i wszystkich $x \notin A$. Wtedy $\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq A$ więc

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mu(A) < \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych $n$. Drugie stwierdzenie wynika z Twierdzenia 2.4.1. ♢

Zbieżność według miary jest jednak własnością istotnie słabszą niż zbieżność prawie wszędzie, nawet przy założeniu skończoności miary. Poniższy przykład nosi nazwę "wędrującego garbu".

**Przykład 2.4.5** Niech $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem

$$\chi_{[0,1]}, \chi_{[0,1/2]}, \chi_{[1/2,1]}, \chi_{[0,1/4]}, \chi_{[1/4,1/2]}, \ldots$$

gdzie w ogólności "garb" ma długość $1/2^n$ i przemierza cały odcinek $[0,1]$. Bez trudu sprawdzamy, że $f_n$ zbiega do zera według miary Lebesgue'a, ale $\liminf_n f_n(x) = 0$ i $\limsup_n f_n(x) = 1$ dla każdego $x \in [0,1]$. ♢

W powyższym przykładzie można bez trudu wskazać podciągi ciągu $f_n$ zbieżne prawie wszędzie do zera. To jest ogólna prawidłowość, wysłowiona w poniższym twierdzeniu Riesza.

**Twierdzenie 2.4.6** *Niech* $(X, \Sigma, \mu)$ *będzie* **dowolną** *przestrzenią miarową i niech* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *będzie ciągiem funkcji mierzalnych, spełniającym warunek Cauchy'ego według miary, to znaczy*

$$\lim_{n,k\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f_k(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0,$$

*dla każdego* $\varepsilon > 0$. *Wtedy*

*(a) istnieje podciąg* $n(k)$ *liczb naturalnych, taki że ciąg funkcji* $f_{n(k)}$ *jest zbieżny prawie wszędzie oraz według miary do pewnej funkcji* $f$;

*(b) ciąg* $f_n$ *jest zbieżny według miary do* $f$.

*Dowód.* Zauważmy, że wspomniany w założeniu warunek Cauchy'ego implikuje, że dla każdego $k$ istnieje $n(k)$, takie że dla dowolnych $n, m \geqslant n(k)$ zachodzi

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant 1/2^k\}) \leqslant 1/2^k,$$

przy czym możemy dodatkowo zażądać, aby $n(1) < n(2) < \ldots$. Niech

$$E_k = \{x : |f_{n(k)}(x) - f_{n(k+1)}(x)| \geqslant 1/2^k\}, \quad A_k = \bigcup_{n\geqslant k} E_k;$$

wtedy $\mu(A_k) \leqslant 1/2^{k-1}$ i dlatego zbiór $A = \bigcap_k A_k$ jest miary zero. Jeżeli $x \notin A_k$ to dla każdego $k$ i $x \notin A_k$ mamy

$$|f_{n(i)}(x) - f_{n(i+1)}(x)| \leqslant 1/2^i$$

dla wszystkich $i \geqslant k$. Z nierówności trójkąta otrzymujemy, że dla $j > i \geqslant k$ zachodzi

$$|f_{n(i)}(x) - f_{n(j)}(x)| \leqslant 1/2^{i-1}.$$

Tym samym, dla $x \notin A$ ciąg liczbowy $f_{n(i)}(x)$ spełnia warunek Cauchy'ego i dlatego jest zbieżny do liczby, którą oczywiście oznaczymy $f(x)$. W ten sposób otrzymujemy, że $f_{n(k)}$ zbiega prawie wszędzie do funkcji $f$.

Z powyższych rozważań wynika, że $\{x : |f(x) - f_{n(k)}(x)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq A_k$, co dowodzi zbieżności tego podciągu do funkcji $f$ według miary; tym samym część (a) została wykazana.

Dla sprawdzenia (b) wystarczy zauważyć, że $f_n \xrightarrow{\mu} f$, co wynika z zależności

$$\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \{x : |f_n(x) - f_{n(k)}(x)| \geqslant \varepsilon/2\} \cup \{x : |f_{n(k)}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon/2\},$$

i warunku Cauchy'ego dla zbieżności według miary. $\Diamond$

Warto podkreślić, że badanie własności ciągów zbieżnych według miary wymaga często sporego wysiłku, por. Zadania 2.5.16–18.

## 2.5 Zadania

**2.5.1** Sprawdzić, że operacja przeciwobrazu zbioru przez funkcję zachowuje podstawowe operacje mnogościowe. Zauważyć, że

$$f\left[\bigcup_n A_n\right] = \bigcup_n f[A_n],$$

dla dowolnych zbiorów $A_n$ z dziedziny funkcji $f$. Sprawdzić, że inkluzja

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$$

może być właściwa.

**2.5.2** Niech $f_n : X \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych względem $\sigma$–ciała $\Sigma$. Sprawdzić, że następujące zbiory należą do $\Sigma$:

*(i)* zbiór $x$, dla których ciąg $f_n(x)$ jest rosnący;

*(ii)* zbiór $x$, dla których $f_n(x) < 2$ dla wszystkich $n$;

*(iii)* zbiór $x$, dla których $f_n(x) < 2$ dla prawie wszystkich $n$;

*(iv)* zbiór $x$, dla których $f_n(x) < 2$ dla nieskończenie wielu $n$;

*(v)* zbiór $x$, dla których $\sup_n f_n(x) < 2$;

*(vi)* zbiór $x$, dla których $\sup_n f_n(x) \leqslant 2$;

*(vii)* zbiór $x$, dla których $f_n(x)$ jest zbieżny;

*(viii)* zbiór $x$, dla których $\limsup f_n(x) > \liminf f_n(x)$.

**2.5.3** Wykazać, że suma zbieżnego szeregu funkcji mierzalnych jest mierzalna.

**2.5.4** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie **dowolną** funkcją. Niech $F_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : osc_x(f) \geqslant \varepsilon\}$, gdzie $osc_x(f) \geqslant \varepsilon$ oznacza, że dla każdego $\delta > 0$ istnieją $x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)$ takie że $|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon$.

Sprawdzić, że zbiór $F_\varepsilon$ jest domknięty. Wywnioskować stąd, że zbiór punktów ciągłości funkcji jest borelowski.

**2.5.5** Niech dla każdego $t$ z pewnego zbioru $T$ dana będzie funkcja ciągła $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rozważmy funkcję $h = \sup_{t\in T} f_t$. Wykazać, że $h$ jest funkcją borelowską (nawet jeśli $T$ jest nieprzeliczalny). W tym celu rozważyć zbiór postaci $\{x : h(x) > a\}$.

**2.5.6** Sprawdzić, że każdą funkcję prostą, mierzalną względem $\sigma$–ciała $\Sigma \subseteq P(X)$ można zapisać w postaci

*(i)* $\sum_{i\leqslant n} a_i \chi_{A_i}$, gdzie $A_i \in \Sigma$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n$, oraz

*(ii)* $\sum_{i\leqslant n} b_i \chi_{B_i}$, gdzie $B_i \in \Sigma$, a $B_1, \ldots, B_n$ są parami rozłączne.

Jakie warunki trzeba dopisać, aby takie przedstawienia były jednoznaczne?

**2.5.7** Sprawdzić, że rodzina funkcji prostych jest zamknięta na kombinacje liniowe, branie modułu i mnożenie.

**2.5.8** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, tzn. $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ dla pewnej stałej $L$. Pokazać, że $f[A]$ jest miary Lebesgue'a zero dla każdego $A$ miary zero.

**2.5.9** Wywnioskować z poprzedniego zadania, że obraz zbioru mierzalnego przez funkcję spełniającą warunek Lipschitza jest mierzalny.

Wskazówka: $f[F]$ jest zwarty gdy $f$ jest ciągła i $F \subseteq \mathbb{R}$ jest zwarty; zastosować Wniosek 1.6.3.

**2.5.10** Wykazać, że w zadaniach 8 i 9 wystarczy zakładać, że funkcja $f$ spełnia warunek Lipschitza lokalnie, na każdym odcinku postaci $[-n, n]$, a więc w szczególności gdy $f$ ma ciągłą pochodną.

**2.5.11** Zauważyć, że dowolna funkcja niemalejąca $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest borelowska.

**2.5.12** Skonstruować niemalejącą funkcję ciągłą $g : [0, 1] \to [0, 1]$, taką że $g[C] = [0, 1]$, gdzie $C \subseteq [0, 1]$ jest zbiorem Cantora.

Wkazówka: niech $g(x) = 1/2$ dla $x \in (1/3, 2/3)$; $g(x) = 1/4$ dla $x \in (1/9, 2/9)$ itd.

**2.5.13** Stosując funkcję $g$ z poprzedniego zadania zauważyć, że obraz zbioru mierzalnego przez funkcję ciągłą nie musi być mierzalny oraz że przeciwobraz zbioru mierzalnego przez funkcję ciągłą nie musi być mierzalny.

**2.5.14** Zauważyć, że jeśli $\mu(X) < \infty$, a $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $A$, taki że $\mu(A) < \varepsilon$ i $f$ jest ograniczona na $X \setminus A$.

**2.5.15** Niech $|f_n| \leqslant M$, gdzie $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Sprawdzić, że $|f| \leqslant M$ prawie wszędzie.

**2.5.16** Niech $f_n$ będzie niemalejącym ciągiem funkcji mierzalnych, zbieżnych do $f$ według miary. Udowodnić, że wtedy $f_n \to f$ prawie wszędzie.

**2.5.17** Sprawdzić, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$ to $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$. Pokazać, że $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ przy dodatkowym założeniu, że $f_n$ i $g_n$ są wspólnie ograniczone przez stałą.

**2.5.18** Niech $\mu$ będzie miarą skończoną. Wykazać, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ oraz $f(x) \neq 0$ dla każdego $x$, to $1/f_n \xrightarrow{\mu} 1/f$.

**2.5.19** Niech $\mu(X) < \infty$. Udowodnić, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$ to $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ (por. Zadanie 15). Pokazać, że założenie skończoności miary jest istotne.

## 2.6 Problemy

**2.6.A** Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem mierzalnym miary Lebesgue'a skończonej. Zbadać, czy funkcja

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda(A \cap (x + A)),$$

jest ciągła (tutaj $\lambda$ oznacza miarę Lebesgue'a, $x + A$ oznacza przesunięcie zbioru).

**2.6.B** Wykazać, że każda mierzalna w sensie Lebesgue'a funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest granicą prawie wszędzie ciągu funkcji ciągłych $(f_n)$. W istocie można takie $f_n$ wybrać klasy $C^\infty$.

Wskazówka: Zacząć od przypadku $f = \chi_A$, gdzie $A$ jest skończoną sumą przedziałów.

**2.6.C** Wykazać, że nie istnieje ciąg funkcji ciągłych $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zbieżny punktowo do funkcji $\chi_\mathbb{Q}$ (czyli funkcji charakterystycznej zbioru $\mathbb{Q}$).

Wskazówka: I sposób: można przeprowadzić dowód nie wprost, wykorzystując jedynie własność Darboux. II sposób: udowodnić, że granica ciągu funkcji ciągłych musi mieć punkt ciągłości.

**2.6.D** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie **dowolną** funkcją, spełniającą warunek $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Sprawdzić, że wtedy $f(x) = ax$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Q}$ ($a = f(1)$).

Udowodnić, że jeśli funkcja $f$ jest mierzalna to $f(x) = ax$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

## 2.7 DODATEK: Granice dolne i górne ciągów liczbowych

Niech $(a_n)$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Liczbę $a$ nazywamy punktem skupienia ciągu jeśli istnieje podciąg ciągu $(a_n)$ zbieżny do $a$. Podobnie definiujemy fakt, że $\infty$ lub $-\infty$ jest punktem skupienia ciągu.

**2.7.1** Pokazać, że zawsze istnieje najmniejszy punkt skupienia danego ciągu (będący liczbą bądź $-\infty, \infty$). Tę wielkość oznaczamy $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

**2.7.2** Zauważyć, że $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy ciąg $(a_n)$ jest nieograniczony z dołu.

**2.7.3** Udowodnić, że $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$ (gdzie $a$ jest liczbą) wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy $a_n > a - \varepsilon$ dla prawie wszystkich $n$ i $a_n < a + \varepsilon$ dla nieskończenie wielu $n$.

**2.7.4** Udowodnić, że $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k$.

**2.7.5** Sprawdzić, że $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$.

**2.7.6** Zdefiniować analogiczne pojęcie $\limsup$ i zapisać jego podstawowe własności.

**2.7.7** Zauważyć, że ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy jego granica górna jest równa dolnej i jest liczbą rzeczywistą.

**2.7.8** $\liminf_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - \limsup_{n\to\infty} b_n$ gdy $\lim a_n = a$.

# Rozdział 3

# Całka

*Does anyone believe that the difference between the Lebesgue and Riemann integrals can have physical significance, and that whether say, an airplane would or would not fly could depend on this difference? If such were claimed, I should not care to fly in that plane*
Richard W. Hamming

W niniejszym rozdziale wprowadzimy i zbadamy centralne pojęcie skryptu, czyli całkę typu Lebesgue'a, zdefiniowaną na dowolnej przestrzeni miarowej $\sigma$-skończonej. Założenie $\sigma$-skończoności nie jest tak naprawdę istotne, ale pozwala ominąć kilka komplikacji, por. Problemy 3.6.A–B. Jak się okaże w przypadku prostej rzeczywistej, całka Lebesgue'a ma zastosowanie do znacznie szerszej rodziny funkcji niż klasyczna całka Riemanna.

## 3.1 Całka z funkcji prostych

W tej części będziemy rozważać ustaloną przestrzeń miarową $(X, \Sigma, \mu)$. Całkowanie jest operacją liniową, przypisującą funkcjom wartości liczbowe. Ponieważ całka z funkcji nieujemnej ma wyrażać "pole pod wykresem funkcji" więc jasne, że powinniśmy przyjąć $\int_X \chi_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A)$ dla $A \in \Sigma$, oraz poniższą definicję. Dla symboli $\infty$ i $-\infty$, oprócz konwencji $x + \infty = \infty$, $x - \infty = -\infty$ dla $x \in \mathbb{R}$, przyjmujemy dodatkowo

$$0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0.$$

Przypomnijmy, że wyrażeniu $\infty - \infty$ nie można nadać sensu liczbowego.

**Definicja 3.1.1** *Jeśli $f = \sum_{i \leqslant n} a_i \chi_{A_i}$ dla $A_i \in \Sigma$ to definiujemy*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i \leqslant n} a_i \mu(A_i),$$

*jeśli tylko wyrażenie po prawej stronie wzoru ma sens liczbowy. Mówimy, że funkcja $f$ jest* całkowalna *jeżeli $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ ma wartość skończoną.*

Tym samym dla $f = 2\chi_{[0,1]} + c\chi_{[3,\infty]}$ mamy $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda = 2$ gdy $c = 0$; wartość tej całki jest $\infty$ dla $c > 0$ i $-\infty$ dla $c < 0$. Dla funkcji $g = \chi_{[-\infty,0)} - \chi_{[1,\infty)}$ wyrażenie $\int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\lambda$ nie ma sensu liczbowego.

**Lemat 3.1.2** *Definicja całki z funkcji prostej jest poprawna, to znaczy*

$$\text{jeżeli } f = \sum_{i\leqslant n} a_i\chi_{A_i} = \sum_{j\leqslant k} b_j\chi_{B_j} \quad \text{to} \quad \sum_{i\leqslant n} a_i\mu(A_i) = \sum_{j\leqslant k} b_j\mu(B_j).$$

*Dowód.* Patrz Zadanie 3.5.1. $\diamondsuit$

Oprócz całki po całej przestrzeni możemy rozważać całkę na dowolnym zbiorze $A \in \Sigma$; przyjmujemy po prostu za definicję wzór

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \chi_A \, \mathrm{d}\mu.$$

**Twierdzenie 3.1.3** *Dla funkcji prostej mierzalnej $h$ i funkcji prostych całkowalnych $f$ i $g$ zachodzą nastepujące zależności*

*(i)* $\int_X (af + bg) \, \mathrm{d}\mu = a\int_X f \, \mathrm{d}\mu + b\int_X g \, \mathrm{d}\mu$;

*(ii) jeżeli* $h = 0$ *prawie wszędzie to* $\int_X h \, \mathrm{d}\mu = 0$;

*(iii) jeżeli* $f \leqslant g$ *prawie wszędzie to* $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \, \mathrm{d}\mu$;

*(iv)* $|\int_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu| \leqslant \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_X |g| \, \mathrm{d}\mu$;

*(v) jeżeli* $a \leqslant f \leqslant b$ *prawie wszędzie to* $a\mu(X) \leqslant \int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant b\mu(X)$;

*(vi) dla* $A, B \in \Sigma$, *jeżeli* $A \cap B = \emptyset$ *to*

$$\int_{A\cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

*Dowód.* Wzór (i) dla $a = b = 1$, wynika natychmiast z poprawności definicji całki z funkcji prostych; rozszerzenie tego wzoru na dowolne $a, b \in \mathbb{R}$ to po prostu rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Jeżeli $h = 0$ prawie wszędzie to możemy przedstawić $h$ jako $\sum_i a_i\chi_{A_i}$, gdzie $\mu(A_i) = 0$ i dlatego $\int_X h \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Zauważmy, że jeśli $f \geqslant 0$ prawie wszędzie to $f = h' + \sum_i a_i\chi_{A_i}$ dla pewnej funkcji $h'$ równej zero prawie wszędzie i $a_i \geqslant 0$; stąd i z (ii) otrzymamy $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geqslant 0$. Aby sprawdzić (iii) piszemy $g = f + (g - f)$ i stosując te uwagę, otrzymujemy na mocy (i)

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X (g-f) \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

(iv) wynika z (iii) i nierówności $-|f+g| \leqslant f+g \leqslant |f+g|$. Podobnie sprawdzamy (v).

Wzór w (vi) wynika stąd, że $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$, o ile $A \cap B = \emptyset$ i dlatego

$$\int_{A\cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_{A\cup B} \, \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_A \, \mathrm{d}\mu + \int_X f\chi_B \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

$\diamondsuit$

## 3.2 Całka z funkcji mierzalnych

W dalszym ciągu rozważamy funkcje na ustalonej $\sigma$-skończonej przestrzeni $(X, \Sigma, \mu)$ — zakładamy milcząco, że wszystkie omawiane funkcje są $\Sigma$-mierzalne. Zdefinujemy wpierw całkę z funkcji mierzalnej nieujemnej $f : X \to \mathbb{R}$. Zauważmy, że jeśli $s$ jest nieujemną funkcją prostą, przedstawioną w postaci $s = \sum_{i \leqslant n} a_i \chi_{A_i}$, gdzie $A_i$ są parami rozłączne i $a_i \geqslant 0$ to warunek $0 \leqslant s \leqslant f$ oznacza, geometrycznie rzecz biorąc, że prostokąty postaci $A_i \times [0, a_i]$ znajdują się pod wykresem funkcji $f$ i dlatego powinno być tak, że $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X s \, \mathrm{d}\mu$. Istotnie, przyjmujemy następującą definicję.

**Definicja 3.2.1** *Dla funkcji nieujemnej mierzalnej $f$ definiujemy*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sup\{\int_X s \, \mathrm{d}\mu : 0 \leqslant s \leqslant f\},$$

*gdzie supremum jest liczone po funkcjach $s$ prostych mierzalnych. Funkcję $f$ nazywamy całkowalną, jeżeli całka z $f$ jest skończona.*

Zauważmy, że w istocie całka z funkcji nieujemnej $f$ może być zdefiniowana jako supremum wartości $\int_X s \, \mathrm{d}\mu$, brane po funkcjach prostych całkowalnych, por. Problem 3.6.A–B. W wielu przypadkach wygodniej jest operować raczej poniższym twierdzeniem niż wzorem podanym w Definicji 3.2.1.

**Twierdzenie 3.2.2** *Jeśli $f$ jest nieujemną funkcją mierzalną, a $s_n$ ciągiem funkcji prostych, takim że $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots$ i $\lim_n s_n = f$ prawie wszędzie to*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_X s_n \, \mathrm{d}\mu.$$

*Dowód.* Ponieważ ciąg całek $\int_X s_n \, \mathrm{d}\mu$ jest niemalejący na mocy Twierdzenia 3.1.3(iii) więc faktycznie granica $\lim_n \int_X s_n \, \mathrm{d}\mu$, właściwa lub niewłaściwa, zawsze istnieje oraz na mocy definicji całki zachodzi nierówność $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geqslant \lim_n \int_X s_n \, \mathrm{d}\mu$.

Rozważmy funkcję prostą $g$, taką że $0 \leqslant g \leqslant f$ i $g = \sum_{i \leqslant k} a_i \chi_{A_i}$, gdzie $A_i$ są parami rozłącznymi zbiorami miary skończonej. Wtedy $X_0 = \bigcup_{i \leqslant k} A_i$ ma miarę skończoną; niech $M = \max_i a_i$ (w tym momencie wielkości $\mu(X_0)$ i $M$ są ustalone!).

Z twierdzenia Jegorowa 2.4.1 $s_n$ zbiega do $f$ niemal jednostajnie na zbiorze $X_0$. Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $A \subseteq X_0$, taki że $\mu(A) < \varepsilon / M$ i zbieżność na $X_0 \setminus A$ jest jednostajna. Tym samym dla dużych $n$ mamy nierówność

$$g(x) - s_n(x) \leqslant f(x) - s_n(x) < \varepsilon / \mu(X_0),$$

dla $x \in X_0 \setminus A$ i dlatego

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \int_{X_0} g \, \mathrm{d}\mu = \int_{X_0 \setminus A} g \, \mathrm{d}\mu + \int_A g \, \mathrm{d}\mu \leqslant$$

$$\int_{X_0 \setminus A} (s_n + \varepsilon / \mu(X_0)) \, \mathrm{d}\mu + M\mu(A) \leqslant \int_{X_0} s_n \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon + \varepsilon,$$

co dowodzi, że $\lim \int_X s_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X g \, \mathrm{d}\mu$. ♢

Wreszcie całkę z funkcji mierzalnych niekoniecznie nieujemnych definiujemy za pomocą rozkładu opisanego w Lemacie 2.1.14.

**Definicja 3.2.3** *Mówimy, że funkcja mierzalna $f : X \to \mathbb{R}$ jest* całkowalna *jeżeli*

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty;$$

*w takim przypadku definiujemy całkę wzorem*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

*gdzie $f = f^+ - f^-$ jest rozkładem na $f^+ = \max(f, 0)$ i $f^- = -\min(f, 0)$.*

Zauważmy, że funkcja $f$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy funkcje $f^+$ i $f^-$ sa całkowalne. Oczywiście w przypadku, gdy $\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu = \infty$ i $\int_X f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty$ czymś naturalnym jest przyjąć $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \infty$. Zauważmy też, że dla funkcji całkowalnej $f$ i $A \in \Sigma$, zachodzi wzór

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \chi_A \, \mathrm{d}\mu.$$

Teraz bez trudu rozszerzymy podstawowe własności całki na przypadek funkcji mierzalnych.

**Twierdzenie 3.2.4** *Dla funkcji całkowalnych $f, g$ i funkcji mierzalnej $h$ zachodzą nastepujące zależności*

*(i)* $\int_X (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu$;

*(ii) jeżeli $f \leqslant g$ to $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \, \mathrm{d}\mu$;*

*(iii) jeżeli $a \leqslant f \leqslant b$ to $a\mu(X) \leqslant \int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant b\mu(X)$;*

*(iv) jeżeli $h = 0$ prawie wszędzie to $\int_X h \, \mathrm{d}\mu = 0$;*

*(v) jeżeli $\int_X h \, \mathrm{d}\mu = 0$ i $h \geqslant 0$ prawie wszędzie to $h = 0$ prawie wszędzie;*

*(vi)* $|\int_X (f + g) \, \mathrm{d}\mu| \leqslant \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_X |g| \, \mathrm{d}\mu$;

*(vii) dla $A, B \in \Sigma$, jeżeli $A \cap B = \emptyset$ to*

$$\int_{A\cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

*Dowód.* Ad (i). Dla funkcji nieujemnych $f, g$ możemy, korzystając z Twierdzenia 2.2.3, dobrać niemalejące ciągi funkcji prostych $s_n$ i $t_n$, takie że zachodzi zbieżność punktowa $s_n \to f$ i $t_n \to g$. Wtedy $s_n + t_n \to f + g$ więc korzystając z Twierdzenia 3.2.2 i 3.1.3(i) otrzymujemy

$$\int_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_X (s_n+t_n) \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_X s_n \, \mathrm{d}\mu + \lim_n \int_X t_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Teraz rozszerzenie wzoru na przypadek dowolny wynika natychmiast z Definicji 3.2.3.

Ad (ii). W przypadku $0 \leqslant f \leqslant g$ nierówność $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \, \mathrm{d}\mu$ wynika natychmiast z Definicji 3.2.1. W ogólnym przypadku, pisząc $f = f^+ - f^-$ i $g = g^+ - g^-$, mamy $f^+ \leqslant g^+$ i $f^- \geqslant g^-$, czyli

$$\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g^+ \, \mathrm{d}\mu \quad \text{i} \quad \int_X g^- \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu;$$

odejmując te nierówności stronami otrzymujemy żądaną zależność.

Ad (iii). Przyjmując $g = b\chi_X$ mamy $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \, \mathrm{d}\mu = b\mu(X)$ z (ii). Drugą nierówność sprawdzamy analogicznie.

Ad (iv). Jeżeli $h = 0$ prawie wszędzie to $s = 0$ prawie wszędzie dla każdej funkcji prostej $s$, takiej że $0 \leqslant s \leqslant h$ i dlatego w tym przypadku $\int_X h \, \mathrm{d}\mu = 0$ na mocy Twierdzenia 3.1.3. W przypadku ogólnym, przedstawiając $h$ w postaci $h = h^+ - h^-$ mamy $h^+ = h^- = 0$ prawie wszędzie i dlatego $\int_X h \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Ad (v). Załóżmy, że $h$ nie jest prawie wszędzie równa zeru. Wtedy dla zbioru $A = \{x : h(x) > 0\}$ mamy $\mu(A) > 0$; oznaczając $A_n = \{x : h(x) > 1/n\}$, spełniona jest zależność $A = \bigcup_n A_n$, a zatem istnieje $n_0$, takie że $\mu(A_{n_0}) > 0$. Stąd, na mocy (iii),

$$\int_X h \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{A_{n_0}} h \, \mathrm{d}\mu \geqslant (1/n_0)\mu(A_{n_0}) > 0.$$

Części (vi) i (vii) sprawdzamy tak samo jak dla funkcji prostych, por. Twierdzenie 3.1.3. ♢

Uwzględniając własności całki opisane w Twierdzeniu 3.2.4 nietrudno wywnioskować następującą własność monotoniczności całki.

**Wniosek 3.2.5** *Jeżeli $f \leqslant g$ prawie wszędzie to*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

*o ile tylko całki występujące we wzorze mają sens liczbowy.*

## 3.3 Twierdzenia graniczne

Przedstawimy teraz klasyczne twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki — jak się okaże możliwości wykonania takiej operacji wymagają dość słabych założeń. Niezmiennie rozważamy ustaloną przestrzeń $\sigma$-skończoną $(X, \Sigma, \mu)$ i milcząco zakładamy, że wszystkie omawiane funkcje są mierzalne względem $\sigma$-ciała $\Sigma$.

**Twierdzenie 3.3.1 (o zbieżności monotonicznej)** *Niech funkcje $f_n$ będą nieujemne oraz $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ prawie wszędzie to funkcja graniczna $f = \lim_n f_n$ spełnia wzór*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Odnotujmy przed dowodem, że funkcje $f_n$ nie muszą być całkowalne. Funkcja graniczna jest dobrze określona prawie wszędzie, przy czym $f$ może przyjmować wartości nieskończone.

*Dowód.* Jak wynika z Wniosku 3.2.5 ciąg całek $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$ jest niemalejący i dlatego istnieje jego granica $\lim_n \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Wystarczy więc uzasadnić nierówność przeciwną. W tym celu rozważymy funkcję prostą $s$, taką że $0 \leqslant s \leqslant f$ i pokażemy, że $\lim_n \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X s \, \mathrm{d}\mu$.

Przypuśćmy, że $s = \sum_{i \leqslant k} a_i \chi_{A_i}$, gdzie $a_i > 0$, a zbiory $A_i$ są parami rozłączne i $\mu(A_i) < \infty$. Wtedy $X_0 = \bigcup_{i \leqslant k} A_i$ jest zbiorem miary skończonej i bez zmniejszenia ogólności można zakładać,że $\mu(X_0) > 0$. Niech $M = \max_i a_i$; dla ustalonego $\varepsilon > 0$ z Twierdzenia Jegorowa istnieje zbiór mierzalny $B \subseteq X_0$, taki że $\mu(B) < \varepsilon/M$ oraz

$$f_n(x) \geqslant s(x) - \varepsilon/\mu(X_0)$$

dla wszystkich $x \in X_0 \setminus B$ i dostatecznie dużych $n$. Dla takich $n$

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{X_0 \setminus B} f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{X_0 \setminus B} (s - \varepsilon/\mu(X_0)) \, \mathrm{d}\mu \geqslant$$

$$\geqslant \int_{X_0} s \, \mathrm{d}\mu - \int_B s \, \mathrm{d}\mu - \varepsilon \frac{\mu(X_0 \setminus B)}{\mu(X_0)} \geqslant \int_{X_0} s \, \mathrm{d}\mu - 2\varepsilon,$$

ponieważ $\int_B s \, \mathrm{d}\mu \leqslant M\mu(B) \leqslant \varepsilon$. W ten sposób dowód został zakończony. $\diamondsuit$

**Twierdzenie 3.3.2 (Lemat Fatou)** *Dla dowolnego ciągu funkcji nieujemnych $f_n$ zachodzi nierówność*

$$\int_X \liminf_n f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_n \int_X f_n dx\mu.$$

*Dowód.* Oznaczając

$$g_n = \inf_{k \geqslant n} f_k, \quad f = \liminf_n f_n,$$

otrzymujemy $0 \leqslant g_1 \leqslant g_2 \leqslant \ldots$ oraz $\lim_n g_n = f$ (patrz Zadanie 2.7.4). Dlatego z Twierdzenia 3.3.1

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f \, \mathrm{d}\mu,$$

a to daje natychmiast tezę twierdzenia. $\diamondsuit$

Jeżeli

$$f_n = \chi_{[0,1/2]} \quad \text{lub} \quad f_n = \chi_{[1/2,1]}$$

w zależności od tego, czy $n$ jest parzyste, czy nieparzyste, to $\liminf_n f_n = 0$, podczas gdy $\int_{[0,1]} f_n \, \mathrm{d}\mu = 1/2$ dla każdego $n$. Ten prosty przykład pokazuje, że w lemacie Fatou nie musi być równości; jednocześnie przykład ten pozwala łatwo zapamiętać, która nierówność jest zawsze prawdziwa. Nietrudno też pokazać ma przykładzie, że założenie $f_n \geqslant 0$ w Twierdzeniu 3.3.2 jest istotne, por. Zadanie 3.5.17.

**Twierdzenie 3.3.3 (Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej)** *Niech $f_n$ i $g$ będą takimi fukcjami mierzalnymi, że dla każdego $n$ nierówność $|f_n| \leqslant g$ zachodzi prawie wszędzie, przy czym $\int_X g \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Jeżeli $f = \lim_n f_n$ prawie wszędzie to*

$$\lim_n \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0 \quad \textit{oraz} \quad \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

*Dowód.* Przyjmijmy $h_n = |f_n - f|$ i $h = 2g$; wtedy $h_n \to 0$ prawie wszędzie i $0 \leqslant h_n \leqslant h$. Dlatego, stosując lemat Fatou do funkcji $h - h_n$, otrzymujemy

$$\int_X h \, \mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_n (h - h_n) \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_n \int_X (h - h_n) \, \mathrm{d}\mu = \int_X h \, \mathrm{d}\mu - \limsup_n \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Ta zależność daje $\limsup_n \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu = 0$, jako że $\int_X h \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Pokazaliśmy więc, że $\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$. Ponieważ

$$\left| \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu,$$

to druga zależność wynika z pierwszej. $\diamondsuit$

Zauważmy, że dla $X = [0,1]$ i funkcji $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$ zachodzi $f_n \to 0$ $\lambda$-prawie wszędzie, ale $\int_{[0,1]} f_n \, \mathrm{d}\lambda = 1$. Jak widać, występujące (nawet w nazwie) Twierdzenia 3.3.3 założenie "zbieżności ograniczonej" jest istotne. Z twierdzenia Lebesgue'a bezpośrednio wynika następujący wniosek.

**Wniosek 3.3.4** *Niech $\mu(X) < \infty$ i niech funkcje $f_n$ będą wspólnie ograniczone. Jeżeli $f = \lim_n f_n$ prawie wszędzie to $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_X f_n dx\mu$.*

Teraz możemy łatwo uzasadnić następującą własność całki.

**Twierdzenie 3.3.5** *Jeżeli $f$ jest mierzalną i nieujemną funkcją na przestrzeni miarowej $(X, \Sigma, \mu)$ to funkcja $\nu : \Sigma \to [0, \infty]$ dana dla $A \in \Sigma$ wzorem*

$$\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

*jest miarą na $\Sigma$.*

*Dowód.* Jak już było udowodnione (Twierdzenie 3.2.4(vii)), $\nu$ jest addytywną funkcją zbioru na $\Sigma$. Jeżeli $A_n \uparrow A$ dla pewnych zbiorów $A_n, A \in \Sigma$ to $\chi_{A_n}$ jest niemalejącym ciągiem funkcji zbieżnym do $\chi_A$, a $f\chi_{A_n} \to f\chi_A$. Dlatego z Twierdzenia 3.3.1 wynika, że

$$\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_A \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_X f\chi_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \nu(A_n).$$

Stąd $\nu$ jest ciągła z dołu i dlatego $\nu$ jest przeliczalnie addytywna. $\diamondsuit$

## 3.4 Całka Lebesgue'a na prostej

Na prostej rzeczywistej bądź jej podzbiorach możemy całkować funkcje $\lambda$-mierzalne (czyli mierzalne względem $\sigma$-ciała $\mathfrak{L}$ zbiorów mierzalnych. Ponieważ każda funkcja $\mathfrak{L}$-mierzalna jest prawie wszędzie równa funkcji borelowskiej więc w wiekszości przypadków własności całki Lebesgue'a wzgledem $\lambda$ sprowadzają się do rozważania tylko tych ostatnich. Oczywiście należy wyjaśnić, jakie są związki całki Lebesgue'a z klasyczną całką Riemanna.

Niech $f$ będzie ograniczoną funkcją, określoną na odcinku $[a,b]$ zawartym w $\mathbb{R}$. Przypomnijmy, że do definicji całki Riemanna $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ służą pojęcia, które z naszego punktu widzenia można zreferować następująco. Podziałem $\mathcal{P}$ odcinka $[a,b]$ nazywamy dowolną skończoną rodzinę odcinków domknietych, taką że $\bigcup_{I\in\mathcal{P}} I = [a,b]$, przy czym dla $I, I \in \mathcal{P}$, jeżeli $I \neq J$ to zbiór $I \cap J$ jest co najwyżej jednoelementowy (gdy odcinki mają wspólny koniec). Wyrażenia

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{I\in\mathcal{P}} \inf_I(f)\lambda(I), \quad U(f,\mathcal{P}) = \sum_{I\in\mathcal{P}} \sup_I(f)\lambda(I),$$

nazywane są, odpowiednio, sumą dolną i górną dla podziału $\mathcal{P}$. Funkcja $f$ jest całkowalna w sensie Riemanna jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki podział $\mathcal{P}$, że $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$.

Zauważmy, że sumy całkowe opisane powyżej to nic innego jak całki z pewnych funcji prostych; jeśli

$$(*) \quad s = \sum_{I\in\mathcal{P}} \inf_I(f)\chi_I \quad \text{to} \quad L(f,\mathcal{P}) = \int_{[a,b]} s\,\mathrm{d}\lambda,$$

$$(**) \quad t = \sum_{I\in\mathcal{P}} \sup_I(f)\chi_I \quad \text{to} \quad U(f,\mathcal{P}) = \int_{[a,b]} t\,\mathrm{d}\lambda,$$

przy czym $s \leqslant f \leqslant t$ poza, być może, skończoną ilością punktów.

**Twierdzenie 3.4.1** *Jeżeli ograniczona funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna to jest $\lambda$-mierzalna i obie całki są równe:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda.$$

*Dowód.* Z założenia dla każdego $n$ istnieje podział $\mathcal{P}_n$ odcinka $[a.b]$, taki że

$$U(f,\mathcal{P}_n) - L(f,\mathcal{P}_n) < 1/n.$$

Możemy przy tym założyć, że dla każdego $n$ podział $\mathcal{P}_{n+1}$ jest wspisany w podział $\mathcal{P}_n$, to znaczy, że każdy $I \in \mathcal{P}_n$ jest sumą pewnych odcinków z podziału $\mathcal{P}_{n+1}$. Wtedy, jak nietrudno wykazać,

$$L(f,\mathcal{P}_n) \leqslant L(f,\mathcal{P}_{n+1}) \leqslant U(f,\mathcal{P}_{n+1}) \leqslant U(f,\mathcal{P}_n).$$

Dlatego też, oznaczając przez $s_n$ i $t_n$ funkcje proste zdefiniowane analogicznie jak we wzorach (*) i (**) dla podziału $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n$, nierówności

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant t_2 \leqslant t_1$$

zachodzą prawie wszędzie, a dokładnie poza przeliczalnym zbiorem końców odcinków podziałów. Przyjmijmy $f_1 = \lim_n s_n$, $f_2 = \lim_n t_n$; wtedy funkcje $f_1$ i $f_2$ są borelowskie, $f_1 \leqslant f_2$ prawie wszędzie i $\int_{[a,b]} f_1 \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} f_2 \, \mathrm{d}\lambda$, a zatem $f_1 = f_2$ prawie wszędzie. Dlatego funkcja $f$, spełniająca prawie wszędzie nierówności $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ jest mierzalna. Równość całek wynika natychmiast stąd, że

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_n L(f, \mathcal{P}_n) = \lim_n \int_{[a,b]} s_n \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda.$$

$\diamondsuit$

Warto przypomnieć, że w teorii całki Riemanna dowodzi się[1], że funkcja ograniczona $f$ jest całkowalna na odcinku $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy gdy zbiór $D(f)$ jej punktów nieciągłości jest miary Lebesgue'a zero. W ten sposób również można pokazać $\lambda$-mierzalność funkcji R-całkowalnych; por. Zadanie 2.5.4. Warto podkreślić, że jeżeli $A$ jest podzbiorem zbioru Cantora, to funkcja $\chi_A$ jest całkowalna w sensie Riemanna, ale dla nieborelowkich zbiorów $A$ taka funkcja nie jest borelowska, por. uwaga po Przykładzie 1.6.

Oczywiście w dalszym ciągu nie ma potrzeby odróżniania całek Lebesgue'a i Riemanna; dlatego będziemy raczej pisać $\int_a^b f \, \mathrm{d}\lambda$ lub po prostu $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$ na oznaczenie całki Lebesgue'a dla funkcji zmiennej rzeczywistej. Zadanie 3.5.10 pokazują że całka Lebesgue'a pokrywa się też z bezwzględnie zbieżną niewłaściwą całką Riemanna. W jednym tylko przypadku, gdy całka niewłaściwa Riemanna jest zbieżna jedynie warunkowo, według przyjętych definicji funkcja nie jest całkowalna w sensie Lebesgue'a.

Przypomnijmy, że dla zbioru $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ funkcja $\chi_A$ jest klasycznym przykładem funkcji niecałkowalnej w sensie Riemanna. Oczywiście $\int_0^1 \chi_A \, \mathrm{d}\lambda = 0$ bo $\lambda(A) = 0$. Waro zaznaczyć, że przymiotnik *niecałkowalny* ma inne znaczenie w przypadku obu całek: gdy myślimy o całce Riemanna, mówimy najczęściej, że funkcja jest niecałkowalna, gdy jest zbyt skomplikowana i sumy całkowe nie pozwalają prawidłowo zdefiniować całki. Z punktu teorii Lebesgue'a funkcja $f$ jest niecałkowana po prostu dlatego, że $\int |f| \, \mathrm{d}\lambda = \infty$. Tutaj też można napotkać na funkcje "zbyt skomplikowane". czyli niemierzalne, ale nie dają się one zdefiniować w sposób analityczny.

[1]patrz na przykład M. Spivak, *Analiza na rozmaitościach*

## 3.5 Zadania

**3.5.1** Sprawdzić, że wzór

$$\int_X \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

jednoznacznie definiuje całkę z funkcji prostych całkowalnych na dowolnej przestrzeni $(X, \Sigma, \mu)$.

Wskazówka: Jeżeli $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^k b_j \chi_{B_j}$ to istnieje skończona partycja $X$ na zbiory mierzalne $T_s, 1 \leqslant s \leqslant p$, takie że każdy zbiór $A_i$ i każdy zbiór $B_j$ jest sumą pewnych zbiorów $T_s$.

**3.5.2** Niech $\mu(X) = 1$ i $\mu(A_i) \geqslant 1/2$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wykazać, że istnieje $x \in X$ należący do przynajmniej $n/2$ zbiorów $A_i$. W tym celu oszacować $\int_X \sum_{i \leqslant n} \chi_{A_i} \, \mathrm{d}\mu$ (por. Problem 1.11.E).

**3.5.3** Rozważyć funkcję $f(x) = -\frac{1}{x^2+1}$, aby zauważyć, że nie można w ogólnym przypadku zdefiniować całki $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda$ jako supremum z całek $\int s \, \mathrm{d}\lambda$ po funkcjach prostych $s \leqslant f$. Zdefiniować podobną funkcję na $[0, 1]$.

**3.5.4** Niech $(X, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią miarową, a $f, g : X \to \mathbb{R}$ funkcjami mierzalnymi. Sprawdzić że

*(i)* jeśli $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$ dla każdego $A \in \Sigma$, to $f = 0$ prawie wszędzie;

*(ii)* jeśli $f$ jest całkowalna na $X$, to jest też całkowalna na każdym $X_0 \in \Sigma$;

*(iii)* jeśli $A, B \in \Sigma$ i $\mu(A \triangle B) = 0$, to $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_B f \, \mathrm{d}\mu$ dla każdej $f$ (oraz istnienie jednej z całek pociąga istnienie drugiej);

*(iv)* $\int |f - g| \, \mathrm{d}\mu \geqslant |\int |f| \, \mathrm{d}\mu - \int |g| \, \mathrm{d}\mu|$.

**3.5.5** Ustalić, czy

*(i)* iloczyn dwóch funkcji całkowalnych jest całkowalny;

*(ii)* funkcja $f$, gdzie $f = 1$ prawie wszędzie jest całkowalna;

*(iii)* $f$ jest całkowalna jeśli jest całkowalna na każdym zbiorze miary skończonej.

**3.5.6** Rozpatrzmy przestrzeń $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$, gdzie $\mu$ jest miarą liczącą, to znaczy $\mu(A) = |A|$ dla zbiorów skończnych i $\mu(A) = \infty$ dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ nieskończonego.

Udowodnić, że $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^\infty |f(n)| < \infty$. Zauważyć, że w tym przypadku całka jest sumą szeregu.

**3.5.7** Czy istnieje ciąg funkcji całkowalnych, który jest

*(i)* zbieżny prawie wszędzie, ale nie według miary;

*(ii)* zbieżny wg miary ale nie prawie wszędzie;

*(iii)* zbieżny prawie wszędzie, ale nieograniczony;

*(iv)* zbieżny jednostajnie do zera i taki, że całki nie zbiegają do zera;

*(v)* jest zbieżny jednostajnie do funkcji niecałkowalnej.

Przy każdym pytaniu rozważyć przypadek $\mu(X) < \infty$ i $\mu(X) = \infty$.

**3.5.8** Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ograniczoną funkcją borelowską. Zauważyć, że $f$ jest całkowalna względem miary Lebesgue'a na $[a,b]$.

**3.5.9** Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje odcinek $[a,b]$ taki że $\int_{[a,b]} |f| \, \mathrm{d}\mu > \int_{\mathbb{R}} |f| \, \mathrm{d}\mu - \varepsilon$.

**3.5.10** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją dla której istnieje skończona całka niewłaściwa Riemanna $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$. Udowodnić, że $f$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. Wykazać, że założenie nieujemności funkcji jest istotne.

**3.5.11** Niech $\mu(X) < \infty$. Udowodnić, że funkcja mierzalna $f$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla zbiorów $A_n = \{x : |f(x)| \geqslant n\}$ zachodzi warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$.

**3.5.12** Wykazać tzw. nierówność Czebyszewa: dla funkcji całkowalnej $f$ zachodzi

$$\int |f| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon \mu(\{x : \ |f(x)| \geqslant \varepsilon\}).$$

**3.5.13** Wywnioskować z nierówności Czebyszewa, że

$$\text{jeżeli} \quad \int |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \to 0 \quad \text{to} \quad f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

**3.5.14** Niech $A_n$ będzie ciągiem zbiorów mierzalnych, takim że $\mu(A_n \triangle A_k) \to 0$ gdy $n,k \to \infty$. Wykazać, że istnieje mierzalny zbiór $A$, taki że $\mu(A \triangle A_n) \to 0$.

**3.5.15** Zdefiniować funkcje ciągłe całkowalne $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$, takie że $f_n \to 0$ prawie wszędzie, ale funkcja $\sup_n f_n$ nie jest całkowalna.

**3.5.16** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Sprawdzić, że funkcja $F(x) = \int_{[0,x]} f(t) \, \mathrm{d}\lambda(t)$ jest ciągła. Podać przykłady świadczące o tym, że $F$ nie musi być różniczkowalna.

**3.5.17** Zauważyć, że lemat Fatou nie jest prawdziwy bez założenia nieujemności funkcji. Zbadać, przy jakich założeniach o funkcjach zachodzi wzór

$$\limsup_n \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X \limsup_n f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

**3.5.18** Niech $(f_n)$ będzie takim ciągiem funkcji całkowalnych, że $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Udowodnić, że szereg $\sum_n f_n$ jest zbieżny prawie wszędzie i

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

**3.5.19** Zbadać, czy wzór z poprzedniego zadania zachodzi dla szeregu funkcji $f_n(x) = x^{n-1} - 2x^{2n-1}$ na odcinku $(0,1)$.

**3.5.20** Zbadać, czy

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}\,\mathrm{d}x.$$

Jak można uogólnić ten przykład?

**3.5.21** Niech $\mu$ będzie miarą skończoną na $X$; $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi, takimi że $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Udowodnić, że jeśli $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i jednostajnie ciągła to

$$\lim_{n\to\infty} \int_X h(f_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X h(f)\,\mathrm{d}\mu.$$

**3.5.22** Niech $f_n$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych, zbieżnym do całkowalnej funkcji $f$ prawie wszędzie. Udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\lambda \to 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{n\to\infty} \int |f_n|\,\mathrm{d}\lambda = \int |f|\,\mathrm{d}\lambda$.

WSKAZÓWKA: Lemat Fatou.

## 3.6 Problemy

**3.6.A** Mówimy, że przestrzeń miarowa $(X, \Sigma, \mu)$ jest *semiskończona* jeżeli

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \Sigma,\ B \subseteq A,\ \mu(B) < \infty\}.$$

Zauważyć, że każda przestrzeń $\sigma$-skończona jest semiskończona.

**3.6.B** Zauważyć że w definicji całki z funkcji nieujemnej na przestrzeni semiskończonej można liczyć supremum po funkcjach prostych całkowalnych. Sprawdzić, że twierdzenia graniczne dla całki zachodzą niezmienionej formie dla przestrzeni semiskończonych.

**3.6.C** Udowodnić, że każda przestrzeń $(X, \Sigma, \mu)$, która nie jest semiskończona, zawiera nieskończony atom miary, to znaczy zbiór $A \in \Sigma$, taki że $\mu(A) = \infty$ i $\mu(B) \in \{0, \infty\}$ dla każdego zbioru $B \subseteq A$ z $\sigma$-ciała $\Sigma$.

# Rozdział 4

# Miary produktowe i twierdzenie Fubiniego

*Dajcie mi Twierdzenie, a wtedy łatwo znajdę jego dowód.*
Bernhard Riemann

W tym rozdziale zdefiniujemy i zbadamy operację produktowania przestrzeni miarowych oraz udowodnimy twierdzenie Fubiniego[1], które jest podstawową metodą liczenia całek z funkcji wielu zmiennych. Pozwoli nam to na szybkie wprowadzenie wielowymiarowej miary i całki Lebesgue'a w przestrzeniach euklidesowych.

## 4.1 Produktowanie $\sigma$-ciał

Rozważmy dwie przestrzenie $(X, \Sigma)$ i $(Y, \Theta)$, gdzie $\Sigma \subseteq P(X)$ i $\Theta \subseteq P(Y)$ są ustalonymi $\sigma$-ciałami. Zbiory postaci $A \times B$ będziemy nazywać prostokątami; prostokąt $A \times B$ nazwiemy mierzalnym jeżeli $A \in \Sigma$ i $B \in \Theta$. W produkcie $X \times Y$ możemy zdefiniować następujące $\sigma$-ciało.

**Definicja 4.1.1** *Symbolem $\Sigma \otimes \Theta$ oznaczamy $\sigma$-ciało podzbiorów $X \times Y$, zadane jako*

$$\Sigma \otimes \Theta = \sigma\left(\{A \times B : A \in \Sigma,\ B \in \Theta\}\right);$$

*$\Sigma \otimes \Theta$ nazywamy produktem $\sigma$-ciał $\Sigma$ i $\Theta$.*

Oczywiście sama rodzina prostokątów mierzalnych $A \times B$ nie jest zamknięta nawet na skończone sumy. W dalszym ciągu będzie też przydatnym rozważanie ciała

$$\mathcal{F} = a\left(\{A \times B : A \in \Sigma,\ B \in \Theta\}\right),$$

generowanego przez takie prostokąty; ciało $\mathcal{F}$ będziemy nazywać, troche nieściśle, ciałem prostokątów mierzalnych.

[1] Guido Fubini (1879–1943), matematyk włoski

**Lemat 4.1.2** *Zbiór $F \subseteq X \times Y$ należy do ciała prostokątów $\mathcal{F}$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(*) \quad F = \bigcup_{i \leqslant n} A_i \times B_i,$$

*dla pewnych $A_i \in \Sigma$ i $B_i \in \Theta$, $i = 1, \ldots, n$. We wzorze (*) mozna przy tym zażądać, aby prostokąty $A_i \times B_i$ były parami rozłączne.*

*Dowód.* Wystarczy zauważyć, że rodzina tych zbiorów $F$, które można przedstawić w postaci (*) jest ciałem. Oczywiście rodzina ta jest zamknięta na skończone sumy. Fakt, że dla zbioru $F$ zadanego przez (*), jego dopełnienie też mozna zapisać w podobny sposób można nietrudno wywnioskować stąd, że

$$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c),$$

i faktu, że przekrój dwóch prostokątów też jest prostokątem. To, że prostokąty w przedstawieniu (*) można urozłącznić, wynika ze wzoru

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) =$$

$$= [(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \cap B_2)] \cup [(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)],$$

gdzie składniki po prawej stronie są parami rozłączne. $\diamondsuit$

Dla zbioru $E \subseteq X \times Y$ i ustalonych $x \in X$, $y \in Y$, zbiory

$$E_x = \{z \in Y : \langle x, z \rangle \in E\}, \quad E^y = \{z \in X : \langle z, y \rangle \in E\},$$

nazywamy, odpowiednio, cięciem pionowym i poziomym zbioru. Analogicznie, dla funkcji rzeczywistej $f$ określonej na produkcie $X \times Y$ możemy rozważyć odpowiednie funkcje jednej zmiennej:

$$f_x : Y \to \mathbb{R},\ f_x(z) = f(\langle x, z \rangle), \quad f^y : X \to \mathbb{R},\ f_y(z) = f(\langle z, y \rangle).$$

**Lemat 4.1.3** *Jeżeli $E \in \Sigma \otimes \Theta$ to $E_x \in \Theta$ dla każdego $x \in X$ i $E^y \in \Sigma$ dla każdego $y \in Y$.*

*Jeżeli funkcja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ jest $\Sigma \otimes \Theta$-mierzalna to funkcja $f_x$ jest $\theta$-mierzalna dla wszystkich $x \in X$, a funkcja $f^y$ jest $\Sigma$-mierzalna dla każdego $y \in Y$.*

*Dowód.* Ustalmy $x \in X$. Nietrudno sprawdzić, że rodzina $\mathcal{E}$ tych zbiorów $E \in \Sigma \otimes \Theta$, dla których $E_x \in \Theta$ jest $\sigma$-ciałem. Ponieważ $(A \times B)_x = B$ lub $(A \times B)_x = \emptyset$ więc każdy prostokąt mierzalny należy do $\mathcal{E}$. Stąd $\mathcal{E} = \Sigma \otimes \Theta$. Oczywiście sprawdzenie mierzalności cięć poziomych jest analogiczne.

Rodzina tych funkcji $f$ dla których, przy ustalonym $x \in X$, funkcja $f_x$ jest $\Theta$-mierzalna zawiera funkcje proste i dlatego, na mocy Twierdzenia 2.2.3, teza zachodzi dla wszystkich funkcji $f$ nieujemnych, jako że wspomniana rodzina jest zamknięta na granice punktowe. Rozszerzenie na funkcje niekoniecznie nieujemne otrzymujemy jak zwykle przez rozkład na części dodatnią i ujemną. $\diamondsuit$

Dla przykładu możemy rozważyć $\sigma$ ciało produktowe $Bor(\mathbb{R}) \otimes Bor(\mathbb{R})$ na płaszczyźnie. Zauważmy przede wszystkim, że w $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ istnieje inne naturalne $\sigma$-ciało, które teraz zdefiniujemy.

Ponieważ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ jest przestrzenią metryczną przy naturalnej metryce euklidesowej więc możemy rozważać zbiory otwarte i domknięte na płaszczyźnie. Przypomnijmy, że odległość euklidesową liczymy według wzoru

$$||x-y|| = \sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2}, \quad \text{dla } x = \langle x_1, x_2\rangle, y = \langle y_1, y_2\rangle.$$

Jak zwykle kula $B_r(x)$ o środku w $x$ i promieniu $r$ zdefiniowana jest jako

$$B_r(x) = \{y : ||x-y|| < r\}.$$

Zbiór $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ jest otwarty gdy dla każdego $x \in U$ istnieje $r > 0$, takie że $B_r(x) \subseteq U$. Zauważmy jednak, że można równoważnie otwartość $U$ wyrazić przez warunek: dla każdego $x \in U$ istnieje $\delta > 0$, taka że

$$(x_1-\delta, x_1+\delta)\times(x_2-\delta, x_2+\delta) \subseteq U,$$

co oznacza, że wraz z każdym swoim elementem, zbiór $U$ zawiera prostokąt otwarty, otaczający ten punkt i zawarty w $U$. $\sigma$-ciało $Bor(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ borelowskich podzbiorów płaszczyzny jest zdefiniowane jako najmniejsze $\sigma$-ciało zawierające wszystkie zbiory otwarte.

**Twierdzenie 4.1.4** *$Bor(\mathbb{R}) \otimes Bor(\mathbb{R}) = Bor(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.*

*Dowód.* Udowodnimy najpierw, że $Bor(\mathbb{R}) \otimes Bor(\mathbb{R}) \subseteq Bor(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Ponieważ dla otwartego zbioru $V \subseteq \mathbb{R}$, zbiór $V\times\mathbb{R}$ jest otwarty więc, rozważając rodzinę

$$\{B \in Bor(\mathbb{R}) : B\times\mathbb{R} \in Bor(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\},$$

bez trudu sprawdzimy, że taka rodzina jest równa $Bor(\mathbb{R})$. Podobny argument można zastosować do drugiej osi; stąd dla dowolnego borelowskiego prostokąta $A\times B$ mamy

$$A\times B = (A\times\mathbb{R})\cap(\mathbb{R}\times B) \in Bor(\mathbb{R}\times\mathbb{R}),$$

co implikuje żądaną inkluzję.

Zauważmy, że dla dowodu inkluzji przeciwnej $Bor(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \subseteq Bor(\mathbb{R})\otimes Bor(\mathbb{R})$ wystarczy sprawdzić, że dowolny zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ należy do $\sigma$-ciała produktowego. Rozumując jak w dowodzie Twierdzenia 0.3.3 można pokazać, że taki zbiór $U$ można wyrazić jako przeliczalną sumę prostokątów otwartych, co oznacza, że $U \in Bor(\mathbb{R})\otimes Bor(\mathbb{R})$. $\diamondsuit$

**Przykład 4.1.5** Z twierdzenia powyżej wynika, że przekątna $\Delta$, jako zbiór domknięty należy do $Bor(\mathbb{R}) \otimes Bor(\mathbb{R})$; tę samą własność ma wykres każdej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ogólniej, jeżeli funkcja $f$ jest borelowska to jej wykres $G$ można zapisać jako

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} f^{-1}\left[[k/n, (k+1)/n)\right] \times \left[[k/n, (k+1)/n)\right],$$

co pokazuje, że $G \in Bor(\mathbb{R}) \otimes Bor(\mathbb{R})$. $\diamondsuit$

## 4.2 Produktowanie miar

Niech $(X, \Sigma, \mu)$ i $(Y, \Theta, \nu)$ będą dwiema $\sigma$-skończonymi przestrzeniami miarowymi. Przedstawimy teraz konstrukcję miary produktowej $\mu \otimes \nu$, określonej na $\Sigma \otimes \Theta$. Jak się okaże, jest to jedyna taka miara, która spełnia naturalny wzór

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

dla wszystkich prostokątów mierzalnych.

**Lemat 4.2.1** *Niech $\mathcal{F}$ będzie ciałem podzbiorów $X \times Y$, generowanym przez prostokąty postaci $A \times B$, gdzie $A \in \Sigma$, $B \in \Theta$. Wtedy funkcja zbioru $\kappa$ zdefiniowana dla $F \in \mathcal{F}$ wzorem*

$$(**) \quad \kappa(F) = \int_X \nu(F_x) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

*jest przeliczalnie addytywna; ponadto, $\kappa(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ dla wszystkich $A \in \Sigma$, $B \in \Theta$.*

*Dowód.* Zauważmy, że dla $F \in \mathcal{F}$, $F$ jest skończoną sumą prostokątów mierzalnych (Lemat 4.1.2), a stąd łatwo wynika, że funkcja $x \to \nu(F_x)$ jest $\Sigma$-mierzalną funkcją prostą. Ta uwaga uzasadnia poprawność wzoru $(**)$. Addytywność funkcji $\kappa$ wynika z własności całki: jeżeli $E, F \in \mathcal{F}$ są rozłączne to

$$\kappa(E \cup F) = \int_X \nu((E \cup F)_x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X (\nu(E_x) + \nu(F_x)) \, \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_X \nu(E_x) \, \mathrm{d}\mu(x) + \int_X \nu(F_x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \kappa(E) + \kappa(F).$$

Ponadto $\kappa$ jest ciągła z dołu: jeżeli $F_n \in \mathcal{F}$ i $F_n \uparrow F \in \mathcal{F}$ to dla każdego $x \in X$ mamy $(F_n)_x \uparrow F_x$ i dlatego $\nu((F_n)_x) \to \nu(F_x)$, z ciągłości miary $\nu$. Stąd i z twierdzenia o zbieżności monotonicznej

$$\kappa(F_n) = \int_X \nu((F_n)_x) \, \mathrm{d}\mu(x) \to \int_X \nu(F_x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \kappa(F).$$

Ostatecznie $\kappa$ jest przeliczalnie addytywna jako funkcja addytywna i ciągła z dołu (Twierdzenie 1.2.5). Wzór $\kappa(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ wynika natychmiast ze wzoru $(**)$. $\diamondsuit$

**Twierdzenie 4.2.2** *Niech $(X, \Sigma, \mu)$ i $(Y, \Theta, \nu)$ będą $\sigma$-skończonymi przestrzeniami miarowymi. Na $\sigma$-ciele $\Sigma \otimes \Theta$ istnieje jedyna miara $\mu \otimes \nu$, spełniająca dla każdego $A \in \Sigma$ i $B \in \Theta$ warunek*

$$(a) \quad \mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

*Dla dowolnego zbioru $E \in \Sigma \otimes \Theta$ funkcje $x \to \nu(E_x)$ i $y \to \mu(E^y)$ są mierzalne względem odpowiednich $\sigma$-ciał i zachodzą wzory*

$$(b) \quad \mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) \, \mathrm{d}\nu(y).$$

*Dowód.* Funkcja $\kappa$ zdefiniowana w Lemacie 4.2.1 jest przeliczalnie addytywna na ciele $\mathcal{F}$ prostokątów mierzalnych i dlatego rozszerza się do miary na $\sigma(\mathcal{F}) = \Sigma \otimes \Theta$, patrz Twierdzenie 1.7.3. Jedyność miary produktowej wynika stąd, że każda miara spełniająca wzór $(**)$ musi być równa funkcji $\kappa$ na $\mathcal{F}$, por. Lemat 4.1.2. Zauważmy, że jeżeli miary $\mu$ i $\nu$ są $\sigma$-skończone to $X \times Y$ można pokryć przeliczalną sumą prostokątów mierzalnych miary $\kappa$ skończonej.

Wzór (b) sprawdzimy najpierw przy założeniu, że $\mu(X)$ i $\nu(Y)$ są wartościami skończonymi. Niech $\mathcal{E}$ będzie rodziną tych zbiorów $E \in \Sigma \otimes \Theta$, dla których funkcja $x \to \nu(E_x)$ jest $\Sigma$-mierzalna oraz

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Bez trudu sprawdzamy, że rodzina $\mathcal{E}$ zawiera wszystkie prostokąty mierzalne i skończone rozłączne sumy takich prostokątów. Stąd i z Lematu 4.1.2 widać, że $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$. Aby poazać, że $\mathcal{E} = \Sigma \otimes \Theta$ wystarczy upewnić się, że $\mathcal{E}$ jest klasą monotoniczną i zastosować Twierdzenie 1.7.2. Niech na przykład $E_n \in \mathcal{E}$ i $E_n \downarrow E$. Wtedy $\nu(E_x) = \lim_n \nu((E_n)_x)$ więc funkcja $x \to \nu(E_x)$ jest mierzalna oraz

$$\mu \otimes \nu(E) = \lim_n \mu \otimes \nu(E_n) = \lim_n \int_X \nu((E_n)_x) \, \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_X \lim_n \nu((E_n)_x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \nu(E_x) \, \mathrm{d}\mu(x),$$

gdzie zastosowaliśmy ciągłość miary skończonej $\mu \otimes \nu$ z góry oraz twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej (dla całki względem $\mu$). Drugi ze wzorów (b) można sprawdzić analogicznie.

Jeżeli $\mu$ i $\nu$ są $\sigma$-skończone to możemy napisać $X$ i $Y$ jako wstępujące sumy

$$X = \bigcup_n X_n, \quad Y = \bigcup_n Y_n,$$

gdzie zbiory $X_n \in \Sigma$ są miary $\mu$ skończonej i zbiory $Y_n \in \Theta$ są miary $\nu$ skończonej. Niech $E \in \Sigma \otimes \Theta$, $E = \bigcup_n E_n$, gdzie $E_n = E \cap (X_n \times Y_n)$. Wtedy każdy zbiór $E_n$ spełnia wzór (b), czyli

$$\mu \otimes \nu(E_n) = \int_X \nu((E_n)_x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Przechodząc po obu stronach do granicy $n \to \infty$ otrzymamy analogiczną tożsamość dla zbioru $E$. $\diamondsuit$

Dodajmy, że nawet jeśli miary $\mu$ i $\nu$ są zupełne to miara produktowa $\mu \otimes \nu$ nie musi być zupełna na $\Sigma \otimes \Theta$, por. Zadanie 3.5.9. Z Twierdzenia 4.2.2 wynika w szczególności, że istnieje jedyna miara $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$ na borelowskich podzbiorach płaszczyzny. Taka płaska miara Lebesgue'a $\lambda_2$ jest jedyną miarą na płaszczyźnie, uogólniającą elementarny wzór na pole prostokąta. Miarę $\lambda_2$ można też skonstruować, postępując jak w rozdziale 1, to znaczy definiując $\lambda_2$ na pierścieniu generowanym przez prostokąty postaci $[a, b) \times [c, d)$, a następnie rozszerzając miarę na generowane przez nie $\sigma$-ciało. Konstrukcja z Twierdzenia 4.2.2 pozwala uniknąć komplikacji w rachunkach, dzięki temu, że kluczowe fakty wyprowadza się ze znanych już własności całki.

## 4.3 Twierdzenie Fubiniego

Twierdzenie Fubiniego, czyli wzór na całkę względem miary produktowej jest już prostą konsekwencją Twierdzenia 4.2.2. Twierdzenie to zwykle podaje się w następujących dwóch wersjach.

**Twierdzenie 4.3.1 (Twierdzenie Fubiniego)** *Niech $(X, \Sigma, \mu)$ i $(Y, \Theta, \nu)$ będą $\sigma$-skończonymi przestrzeniami miarowymi. O funkcji $\Sigma \otimes \Theta$-mierzalnej $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ załóżmy, że*

*(i) $f$ jest nieujemna, lub*

*(ii) $f$ jest $\mu \otimes \nu$-całkowalna.*

*Wtedy funkcje*

$$I : x \to \int_Y f(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y), \quad J : y \to \int_X f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x),$$

*(przyjmujące być może wartości nieskończone) są mierzalne względem $\Sigma$ i, odpowiednio, $\theta$ oraz*

$$(***) \int_{X \times Y} f \,\mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int_X \left( \int_Y f(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

*Dowód.* Zauważmy, że dla funkcji charakterystycznej $f = \chi_E$ zbioru $E \in \Sigma \otimes \Theta$, wzory (***) redukują się do wzoru (b) z Twierdzenia 4.2.2. Stosując addytywność całek łatwo stąd wynioskować, że teza zachodzi dla każdej funkcji prostej.

Jeżeli $f \geqslant 0$ to biorąc ciąg mierzalnych funkcji prostych $f_n$ monotonicznie zbieżny do $f$ otrzymamy stąd dowód przy założeniu (i). Istotnie, $I(x) = \lim_n I_n(x)$, gdzie $I_n : x \to \int_Y f_n(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y)$ z twierdzenia o zbieżności monotonicznej dla całki względem $\nu$. Dlatego $I$ jest funkcją mierzalną; prechodząc do granicy we wzorze

$$\int_{X \times Y} f_n \,\mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int_X I_n(x)\, \mathrm{d}\mu(x),$$

otrzymujemy natychmiast

$$\int_{X\times Y} f \, \mathrm{d}\mu\otimes\nu = \int_X I(x)\, \mathrm{d}\mu(x),$$

ponieważ po lewej stronie działa twierdzenie o zbieżności monotoniznej dla całki względem $\mu\otimes\nu$, a po prawej dla całki względem miary $\mu$. Drugi ze wzorów (***) można wyprowadzić zupełnie analogicznie.

Zauważmy, że dla funkcji całkowalnej $f \geqslant 0$ mamy $I(x) < \infty$ dla $\mu$-prawie wszystkich $x$, co wynika natychmiast z pierwszego wzoru (***). Dlatego też, jeżeli funkcja $f = f^+ - f^-$ jest $\mu\otimes\nu$-całkowalna to możemy zastosować udowodnioną część twierdzenia do $f^+$ i $f^-$ i odjąć otrzymane wyniki stronami, a to da wzory całkowe dla $f$. $\diamondsuit$

Twierdzenie Fubiniego nie zachodzi dla funkcji, które są jedynie mierzalne — na przykład całki iterowane mogą być skończone, ale dawać różne wyniki, por. Zadania 3.5.10 i 3.5.11.

## 4.4 Produkty skończone i nieskończone

Dla trzech przestrzeni $\sigma$-skończonych $(X_i, \Sigma_i, \mu_i)$ możemy zdefiniować ich produkt jako produkt przestrzeni $(X_1\times X_2, \Sigma_1\otimes\Sigma_2, \mu_1\otimes\mu_2)$ oraz $(X_3, \Sigma_3, \mu_3)$. Ta uwaga prowadzi do następującego uogólnienia Twierdzenia 4.2.2[2].

**Twierdzenie 4.4.1** *Jeżeli $(X_i, \Sigma_i, \mu_i)$ są dla $i = 1, \ldots, n$ $\sigma$-skończonymi przestrzeniami miarowymi to na $\sigma$-ciele $\bigotimes_{i\leqslant n}\Sigma_i$ podzbiorów $X = \prod_{i\leqslant n} X_i$, generowanych przez wszystkie kostki mierzalne $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$, istnieje jedyna miara $\mu = \bigotimes_{i\leqslant n}\mu_i$ spełniająca, dla wszystkich $A_i\in\Sigma_i$, warunek*

$$\mu(A_1\times A_2\times\ldots\times A_n) = \mu_1(A_1)\cdot\mu_2(A_2)\cdot\ldots\cdot\mu_n(A_n).$$

W szczególności na przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ można zdefiniować $n$-wymiarową miarę Lebesgue'a $\lambda_n$, przyjmując

$$\lambda_n = \bigotimes_{i\leqslant n}\lambda.$$

Miara $\lambda_n$ może być rozważana na $\sigma$-ciele

$$\bigotimes_{i\leqslant n} Bor(\mathbb{R}) = Bor(\mathbb{R}^n),$$

generowanym przez wszystkie $n$-wymiarowe kostki borelowskie; por. Zadanie 3.5.14.

[2] szczegóły dowodu zostaną pominiete

Twierdzenie Fubiniego pokazuje, że całka względem miary $n$-wymiarowej może być sprowadzona do $n$ całek iterowanych, Zauważmy na przykład, że dla funkcji nieujemnej $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ możemy napisać

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, \mathrm{d}\lambda_3 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, x_3) \, \mathrm{d}\lambda(x_1) \, \mathrm{d}\lambda(x_2) \, \mathrm{d}\lambda(x_3),$$

a w istocie jest 3! takich wzorów, uwzględniających różne kolejności liczenia całek.

Rozważa się też produkty nieskończone przestrzeni miarowych probabilistycznych. Dowód twierdzenia poniżej pomijamy; w szczególnych przypadkach twierdzenie to omówimy dokładniej w dalszym ciągu.

**Twierdzenie 4.4.2** *Jeżeli $(X_n, \Sigma_n, \mu_n)$ jest ciągiem przestrzeni probabilistycznych to na $\sigma$-ciele $\bigotimes_n \Sigma_n$ podzbiorów $X = \prod_n X_n$, generowanych przez wszystkie skończenie wymiarowe kostki mierzalne postaci*

$$E = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots,$$

*gdzie $A_i \in \Sigma_i$ dla $i \leqslant n$, istnieje jedyna miara $\mu = \bigotimes_n \mu_n$ spełniająca, dla wszystkich zbiorów $E$ jak wyżej, warunek*

$$\mu(E) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n).$$

## 4.5 Miara na zbiorze Cantora

Zagadnienie nieskończonych produktów zilustrujemy następującym ważnym przykładem[3]. Na zbiorze dwuelementowym $X_0 = \{0, 1\}$ możemy zdefiniować miarę $\mu = 1/2(\delta_0 + \delta_1)$, określoną na wszystkich podzbiorach $X_0$. Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}$, miara $\bigotimes_{i \leqslant n} \mu$ na $\{0, 1\}^n$ jest po prostu unormowaną miarą liczącą: każdy punkt przestrzeni ma miarę $1/2^n$. Okazuje się, że operacja nieskończonego produktu nawet dla tak prostej miary jak $\mu$ prowadzi do jakościowo zupełnie innej miary.

Niech $K = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem wszystkich nieskończonych ciągów zerojedynkowych. Nietrudno sprawdzić, że na zbiorze $K$ można określić metrykę $d$ wzorem

$$d(x, y) = 1/n \text{ gdzie } n = \min\{k : x(k) \neq y(k)\},$$

dla $x \neq y$; ponadto przyjmujemy $d(x, x) = 0$. Zauważmy, że zbieżność w metryce $d$ to zbieżność po współrzędnych, to znaczy dla $x_n, x \in K$, zbieżność $d(x_n, x) \to 0$ jest równoważna temu, że $x_n(k) \to x(k)$ dla każdego $k$ (co w tym przypadku oznacza, że $x_n(k) = x(k)$ dla dostatecznie dużych $n$). Dowodzi się, że przestrzeń $K$ jest zwarta w metryce $d$ — ten fakt wynika też z następującego twierdzenia, które mówi, że przestrzeń $K$ jest nieco tylko innym opisem zbioru Cantora.

[3] ta część podana jest nieco szkicowo i stanowi materiał nieobowiązkowy

**Twierdzenie 4.5.1** *Funkcja*

$$f : K \to [0,1], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x(n)}{3^n},$$

*jest homeomorfizmem pomiedzy przestrzenią $K$ i zbiorem $f[K] \subseteq [0,1]$, który jest trójkowym zbiorem Cantora $C$.*

*Dowód.* Jeżeli $d(x,y) < 1/n$ to $x(i) = y(i)$ dla $i \leqslant n$ i dlatego

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2(x(k) - y(k))}{3^k} \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = 2 \cdot \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1}{1 - 1/3} = 1/3^n.$$

Ta zależność oznacza, że funkcja $f$ jest ciągła. Z drugiej strony dla $x \neq y$ biorąc najmniejsze $n$, takie że $x(n) \neq y(n)$, otrzymujemy

$$|f(x) - f(y)| \geqslant 2/3^n - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2|x(k) - y(k)|}{3^k} \geqslant 2/3^n - 1/3^n = 1/3^n,$$

co dowodzi różnowartościowości $f$ oraz faktu, że funkcja odwrotna też jest ciągła. Oczywiście $f[K] = C$, jako że elementy $C$ to te liczby z $[0,1]$, które w rozwinięciu trójkowym mają tylko cyfry 0 i 2. ♢

Dlatego też zbiór $K = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest po prostu nazywany zbiorem Cantora. Dla funkcji $\varphi : A \to \{0,1\}$ dziedzinę funkcji $A$ oznaczać będziemy $A = \mathrm{dom}(\varphi)$. Dla dowolnego skończonego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ definiujemy

$$[\varphi] = \{x \in K : x(i) = \varphi(i) \text{ dla } i \in \mathrm{dom}(\varphi)\}.$$

Zauważmy, że dla $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ i dowolnej $\varphi : A \to \{0,1\}$, jeśli $x \in [\varphi]$ to $[\varphi]$ jest kulą o środku w $x$ i promieniu $1/n$ względem metryki $d$.

**Lemat 4.5.2** *Zbiory postaci $[\varphi]$ są jednocześnie otwarte i domknięte w $K$. Rodzina takich zbiorów stanowi bazę topologii w $K$.*

*Dowód.* Zbiór postaci $[\varphi]$ jest otwarty bo jeżeli $x \in [\varphi]$ i $n$ jest taką liczbą, że $\mathrm{dom}(\varphi) \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ to kula $B = B_{1/n}(x)$ (o środku w $x$ i promieniu $1/n$) zawiera te $y$, które zgadzają się z $x$ na pierwszych $n$ współrzędnych, a zatem $B \subseteq [\varphi]$. Z drugiej strony dopełnienie zbioru $[\varphi]$ jest skończoną sumą zbiorów postaci $[\psi]$, gdzie $\mathrm{dom}(\psi) = \mathrm{dom}(\varphi)$ i $\psi \neq \varphi$. Dlatego $[\varphi]$ jest także zbiorem domkniętym. ♢

Oznaczmy przez $\mathcal{C}$ ciało podzbiorów $K$ generowane przez wszystkie cylindry postaci $[\varphi]$, gdzie $\mathrm{dom}(\varphi) \subseteq \mathbb{N}$. Zauważmy, że jest przeliczalnie wiele takich funkcji $\varphi$ i dlatego ciało $\mathcal{C}$ też jest przeliczalne, patrz Zadanie 1.10.11. Można sprawdzić, że każdy zbiór $C \in \mathcal{C}$ jest sumą skończenie wielu zbiorów postaci $[\varphi]$ i dlatego każdy taki zbiór $C$ jest otwarto-domknięty.

**Lemat 4.5.3** *Zbiór $C \in \mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $n$ i $C' \subseteq \{0,1\}^n$, takie że*

$$(\dagger) \quad C = C' \times \{0,1\} \times \ldots .$$

*Dowód.* Zauważmy, że rodzina zbiorów postaci jak w (†) jest ciałem i zawiera cylindry postaci $[\varphi]$. ♢

Zdefiniujemy teraz funkcję zbioru $\nu : \mathcal{C} \to [0,1]$ wzorem

$$\nu(C) = \frac{|C'|}{2^n},$$

gdzie $C$ jest zapisany w postaci (†). Nietrudno sprawdzić, że wielkość $\nu(C)$ nie zależy od sposobu przedstawienia zbioru $C$ oraz że $\nu$ jest addytywną funkcją zbioru.

**Twierdzenie 4.5.4** *Funkcja $\nu$ rozszerza się jednoznacznie do miary na $Bor(K)$. Miara ta (oznaczana w dalszym ciągu przez $\nu$) ma następującą własność: dla każdego $B \in Bor(K)$ i $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $C \in \mathcal{C}$, taki że $\nu(B \triangle C) < \varepsilon$.*

*Dowód.* Zauważmy, że $\nu$, rozpatrywana na ciele $\mathcal{C}$ jest ciągła z góry na zbiorze pustym, bo jeśli $C_n \in \mathcal{C}$ i $C_n \downarrow \emptyset$ to $C_n = \emptyset$ dla dużych $n$. Jest to konsekwencja zwartości przestrzeni $K$. Dlatego też $\nu$ jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{C}$ i rozszerza się jednoznacznie na $\sigma(\mathcal{C})$, patrz Twierdzenie 1.7.3, przy czym $\sigma(\mathcal{C}) = Bor(K)$, jako że zbiory z $C$ są otwarte oraz każdy zbiór otwarty jest sumą przeliczalną zbiorów z $\mathcal{C}$. Własność rozszerzenia miary wynika z Twierdzenia 1.4.3. ♢

Miara $\nu$ skonstruowana powyżej spełnia wzór

$$\nu([\varphi]) = \frac{1}{2^{|\mathrm{dom}(\varphi)|}},$$

dla cylindrów $[\varphi]$. Jak widać $\nu = \bigotimes_n \mu$, gdzie $\mu$ jest miarą na $\{0,1\}$ wspomnianą na początku tej części. Zauważmy, że $\nu$ znika na punktach , a więc także na zbiorach przeliczalnych. Zbiór Cantora $K$ z miarą $\nu$ jest naturalnym modelem probabilistycznym dla "nieskończonego ciągu niezależnych rzutów symetryczną monetą"; por. Problemy 3.6.

Wspomnijmy na koniec, że miara $\nu$ jest ściśle związana ze strukturą grupową zbioru Cantora $K$. Przypomnimy, że zbiór $\{0,1\}$ jst grupą (dodawania mod 2). Oznaczając to działanie przez $\oplus$ możemy zdefiniować

$$x \oplus y = (x(n) \oplus y(n))_n \in K,$$

dla $x, y \in K$. W ten sposób $K$ jest grupą z działaniem $\oplus$. Mamy $x \oplus x = 0$, czyli $-x = x$ w tej grupie. Ponadto działanie $\oplus$ jest ciągłe; jeżeli $x_n \to x$ i $y_n \to y$ to $x_n \oplus y_n \to x \oplus y$, co wynika natychmiast z natury zbieżności w $K$. Mówimy w takim przypadku, że grupa $K$ jest grupą topologiczną. Z ciągłości działania grupowego wynika, ze translacja $x \oplus B$ zbioru borelowskiego $B$ też jest zbiorem borelowkim (patrz Problem 3.6.E) oraz $\nu(x \oplus B) = \nu(B)$; mówimy że $\nu$ jest miarą niezmienniczą na grupie, albo miarą Haara grupy.

## 4.6 Zadania

**4.6.1** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją borelowską. Wykazać, że zbiór pod jej wykresem $\{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ jest borelowskim podzbiorem płaszczyzny.

**4.6.2** Niech $f : X \to \mathbb{R}_+$ będzie nieujemną funkcją mierzalną na przestrzeni $(X, \Sigma, \mu)$; niech $P = \{(x, t) : 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ będzie zbiorem pod wykresem funkcji. Sprawdzić, że $P$ należy do $\sigma$-ciała $\Sigma \otimes Bor(\mathbb{R})$ oraz wywnioskować z twierdzenia Fubiniego, że

$$\mu \otimes \lambda(P) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

**4.6.3** Zauważyć, że zbiór borelowski $A \subseteq [0, 1]^2$ jest płaskiej miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda(A_x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in [0, 1]$.

**4.6.4** Zauważyć, że jeśli zbiory borelowskie $A, B \subseteq [0, 1]^2$ spełniają zależność $\lambda(A_x) = \lambda(B_x)$ dla wszystkich $x$ to $\lambda_2(A) = \lambda_2(B)$.

**4.6.5** Obliczyć miarę Lebesgue'a zbiorów

$$A = \{(x, y) : \ x \in \mathbb{Q} \text{ lub } y \in \mathbb{Q}\}; \qquad B = \{(x, y) : \ x - y \in \mathbb{Q}\}.$$

**4.6.6** Wychodząc ze znanego faktu, że izometrie płaszczyzny nie zmieniają pola prostokątów wykazać, że płaska miara Lebesgue'a jest niezmiennicza na izometrie płaszczyzny.

**4.6.7** Zauważyć, że płaska miara Lebesgue'a spełnia wzór $\lambda_2(J_r[B]) = r^2 \lambda_2(B)$ dla $B \in Bor(\mathbb{R}^2)$, gdzie $J_r$ jest jednokładnością o skali $r$.

**4.6.8** Wyprowadzić z tw. Fubiniego

*(i)* wzór na objętość stożka o wysokości $h$, który na podstawie ma zbiór borelowski $B \subseteq \mathbb{R}^2$;

*(ii)* wzór na objętość kuli o promieniu $r$ w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$.

**4.6.9** Zauważyć, że $\lambda \otimes \lambda$ nie jest miarą zupełną na $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$.

**4.6.10** Niech $\nu$ będzie miarą liczącą na wszystkich podzbiorach $\mathbb{N}$. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dla której całki iterowane w twierdzeniu Fubiniego dają różne wyniki skończone.

Wskazówka: Określić niezerowe wartości $f(n, n)$ i $f(n + 1, n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

**4.6.11** Na kwadracie jednostkowym rozważyć funkcje

$$f(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$f(0, 0) = g(0, 0) = 0$. Zbadać całkowalność, istnienie całek iterowanych, ich równość i odnieść te obserwacje do twierdzenia Fubiniego.

**4.6.12** Wykazać, że dla całkowalnej funkcji $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ zachodzi wzór

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y).$$

**4.6.13** Niech $\mathcal{A}$ będzie $\sigma$–ciałem na $[0,1]$, generowanym przez zbiory przeliczalne. Pokazać, że przekątna $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2 :\ x = y\}$ nie należy do $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

**4.6.14** Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest borelowska jeśli $f^{-1}[B] \in Bor(\mathbb{R}^n)$ dla $B \in Bor(\mathbb{R}^k)$. Tutaj $Bor(\mathbb{R}^n)$ oznacza $\sigma$-ciało generowane przez otwarte podzbiory $\mathbb{R}^n$. Sprawdzić, że

*(i)* $Bor(\mathbb{R}^2)$ jest generowane przez otwarte prostokąty $U \times V$;

*(ii)* $Bor(\mathbb{R}^n)$ jest generowane przez otwarte kostki $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$;

*(iii)* każda funkcja ciągła $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest borelowska;

*(iv)* funkcja $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ jest borelowska wtedy i tylko wtedy gdy $g_1, g_2$ są borelowskie.

**4.6.15** Wywnioskować z poprzedniego zadania, że jeśli $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są mierzalne to $g_1 + g_2, g_1 \cdot g_2$ też są mierzalne.

**4.6.16** Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem mierzalnym pomiędzy przestrzeniami $(X, \Sigma, \mu)$ i $(Y, \mathcal{A})$, to znaczy $f^{-1}[A] \in \Sigma$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Sprawdzić, że wzór $\nu(A) = \mu(f^{-1}[A])$ definiuje miarę na $\mathcal{A}$. Te miarę nazywamy obrazem $\mu$ przez $f$; oznaczamy $\nu = f[\mu]$.

## 4.7 Problemy

**4.7.A** Przy założeniu hipotezy continuum można odcinek $[0,1]$ uporządkować relacją $\prec$ tak, że każdy odcinek początkowy $\{a : a \prec b\}$ w tym porządku jest przeliczalny dla $b \in [0,1]$. Zauważyć, że zbiór

$$Z = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x \prec y\},$$

nie spełnia twierdzenia Fubiniego, a więc nie jest mierzalny na płaszczyźnie.

**4.7.B** Pokazać, że istnieje na płaszczyźnie zbiór $A$ miary płaskiej zero, taki że $A$ przecina wszystkie prostokąty mierzalne miary dodatniej.

Wskazówka: Uogólnić najpierw tw. Steinhausa do postaci: jeśli $A, B$ są miary dodatniej to $A - B$ zawiera liczbę wymierną.

**4.7.C** Niech $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ będzie przekątną. Udowodnić, że $\Delta$ należy do $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(X)$ wtedy i tylko wtedy gdy $|X| \leqslant \mathfrak{c}$.

**4.7.D** Niech

$$h : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1], \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}.$$

Sprawdzić, że $h$ jest funkcją ciągłą, a więc mierzalną względem $\sigma$–ciała $Bor\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ i $h[\{0,1\}^{\mathbb{N}}] = [0,1]$.

Wykazać, że miara $\lambda$ na $[0,1]$ jest obrazem miary Haara $\nu$ na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ przez tę funkcję.

**4.7.E** Niech $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem tych $x$, w których pojawia się, choć raz, ustalony skończony ciąg $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ zer i jedynek. Wykazać, że $\nu(A) = 1$.

**4.7.F** Udowodnić, że $\nu(x \oplus A) = \nu(A)$ dla każdego borelowskiego zbioru $A$ w zbiorze Cantora $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

WSKAZÓWKA: Sprawdzić najpierw wzór dla zbiorów $C$ z ciała $\mathcal{C}$ zdefiniowanego w 4.5.

**4.7.G** Zbiór borelowski $A \subseteq \{0,1\}$ jest nazywany *zdarzeniem resztowym* jeżeli $e \oplus A = A$ dla dowolnego $e \in \{0,1\}$, dla którego $e(n) = 0$ dla prawie wszystkich $n$. Udowodnić, że $\nu(A) = 0$ lub $\nu(A) = 1$ dla każdego zdarzenia resztowego (jest tzw. prawo 0-1 Kołmogorowa).

WSKAZÓWKA: Jeżeli $A$ jest takim zdarzeniem to $\nu(A \cap C) = \nu(A)\nu(C)$ dla każdego $C \in \mathcal{C}$; skorzystać z tego, że wielkość $\nu(A \triangle C)$ może być dowolnie mała.

**4.7.H** Niech $X$ będzie zbiorem skończonym i niech $\mu$ będzie miarą określona na wszystkich podzbiorach $X \times X$, znikającą na przekątnej. Udowodnić, że istnieją rozłączne $A, B \subseteq X$, takie że $\mu(A \times B) \geqslant 1/4$.

# Rozdział 5

# Miary znakowane i twierdzenie Radona-Nikodyma

*If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.*
John von Neumann

Rozdział jest w całości poświęcony związkom, jakie mogą zachodzić pomiędzy dwiema miarami określonymi na tym samym $\sigma$-ciele. Głównym wynikiem jest tutaj tytułowe twierdzenie Radona-Nikodyma[1], należące do najważniejszych faktów z teorii miary. W ostatniej części dokonamy, w charakterze małego podsumowania, przeglądu miar na prostej rzeczywistej.

## 5.1 Miary znakowane

Niech $\Sigma$ będzie ustalonym $\sigma$-ciałem podzbiorów przestrzeni $X$. Jeżeli $\mu$ i $\nu$ są miarami określonymi na $\Sigma$, to $\mu+\nu$ też jest miarą na $\Sigma$ — sprawdzenie przeliczalnej addytywności $\mu+\nu$ nie przedstawia trudności. W przypadku, gdy przynajmniej jedna z miar $\mu$ i $\nu$ jest skończona można także rozważyć funkcję zbioru $\mu-\nu$ na $\Sigma$. Taka funkcja zbioru nie musi być miarą, jako że może przyjmować wartości ujemne. Jednakże $\mu-\nu$ spełnia warunek przeliczalnej addytywności, więc w pewnym sensie dalej jest miarą.

**Definicja 5.1.1** *Funkcję zbioru $\alpha : \Sigma \to [-\infty, \infty]$, przyjmującą co najwyżej jedną z wartości nieskończonych $-\infty, \infty$ nazywamy* miarą znakowaną *jeżeli $\alpha(\emptyset) = 0$ oraz*

$$\alpha\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \alpha(A_n),$$

*dla każdego ciągu parami rozłącznych zbiorów $A_n \in \Sigma$.*

[1] Otton Nikodym (1887-1974), matematyk polski, po wojnie w USA; Johann Radon (1887-1956) pracował na Universität Breslau do roku 1945

Jak się okaże, każda miara znakowana daje przedstawić się jako różnica dwóch miar i można takiego rozkładu dokonać w pewien kanoniczny sposób.

**Twierdzenie 5.1.2 (rozkład Hahna)** *Jeżeli $\alpha$ jest miarą znakowaną na $\sigma$-ciele $\Sigma$ podzbiorów $X$ to istnieją rozłączne zbiory $X^+$ i $X^-$, takie że $X = X^+ \cup X^-$ oraz dla dowolnego $A \in \Sigma$,*

*(i) jeżeli $A \subseteq X^+$ to $\alpha(A) \geqslant 0$;*

*(ii) jeżeli $A \subseteq X^-$ to $\alpha(A) \leqslant 0$.*

*Dowód.* Załóżmy dla przykładu, że $\alpha$ nie przyjmuje wartości $-\infty$. Dla potrzeb dowodu powiedzmy, że zbiór $B \in \Sigma$ jest *negatywny*, jeżeli $\alpha(A) \leqslant 0$ dla każdego zbioru mierzalnego $A \subseteq B$. Niech $r = \inf_B \alpha(B)$, gdzie infimum jest liczone po wszystkich zbiorach negatywnych.

Wtedy istnieje zbiór negatywny $B$ taki, że $\alpha(B) = r$. Istotnie, z określenia kresu dolnego (który, a priori, może być równy $-\infty$) istnieje ciąg zbiorów negatywnych $B_n$, taki że $\alpha(B_n) \to r$. Jak łatwo sprawdzić, zbiór $B = \bigcup_n B_n$ jest także negatywny, a więc dla każdego $n$

$$\alpha(B) = \alpha(B_n) + \alpha(B \setminus B_n) \leqslant \alpha(B_n),$$

co pokazuje, że $\alpha(B) = r$ (a w szczególności, że $r > -\infty$). Niech $X^- = B$ i $X^+ = X \setminus X^-$. Wystarczy teraz upewnić się, że $X^+$ jest pozytywny, to znaczy spełnia część (ii) tezy twierdzenia.

Przypuśćmy, że $E_0 \subseteq X^+$ jest takim zbiorem mierzalnym, że $\alpha(E_0) < 0$. Wtedy $E_0$ nie może być negatywny bo inaczej mielibyśmy

$$\alpha(B \cup E_0) = \alpha(B) + \alpha(E_0) < \alpha(B) = r,$$

co przeczyłoby definicji liczby $r$. Istnieje więc najmniejsza liczba naturalna $k_1$ i $E_1 \subseteq E_0$ o własności $\alpha(E_1) \geqslant 1/k_1$. Teraz

$$\alpha(E_0 \setminus E_1) = \alpha(E_0) - \alpha(E_1) < 0$$

i możemy powtórzyć nasze ostatnie rozumowanie: istnieje najmniejsza liczba $k_2 \in \mathbb{N}$, taka że dla pewnego $E_2 \subseteq E_0 \setminus E_1$, $\alpha(E_2) \geqslant 1/k_2$. W ten sposób definiujemy ciąg parami rozłącznych zbiorów mierzalnych $E_n \subseteq E_0$ i ciąg liczb $k_n \in \mathbb{N}$, takich że $\alpha(E_n) \geqslant 1/k_n$ dla każdego $n$, przy czym $k_n$ jest najmniejszą liczbą naturalną o tej własności. Zauważmy, że $\alpha(E) < \infty$ dla każdego $E \subseteq E_0$ (skoro $\alpha(E_0) < 0$) i dlatego, stosując tę uwagę do zbioru $E = \bigcup_{n \geqslant 1} E_n$, wnioskujemy, że

$$\alpha(E) = \sum_n 1/k_n < \infty,$$

co oznacza w szczególności, że $\lim_n 1/k_n = 0$. Dla zbioru $F = E_0 \setminus E$ mamy $\alpha(F) < 0$ oraz jeżeli $A \subseteq F$ to, dla każdego $n$, $A \subseteq E_0 \setminus E_n$, a zatem $\alpha(A) \leqslant 1/(k_n - 1)$ z minimalności liczby $k_n$. Oznacza to, że $\alpha(A) \leqslant 0$, czyli że $F$ jest negatywnym zbiorem, a to stanowi sprzeczność, gdyż znowu mielibyśmy $\alpha(F \cup B) < \alpha(B) = r$. $\diamondsuit$

**Wniosek 5.1.3 (Rozkład Jordana)** *Jeżeli $\alpha$ jest miarą znakowaną na $\sigma$-ciele $\Sigma$ podzbiorów $X$ to istnieją miary $\alpha^+$ i $\alpha^-$ na $\Sigma$, takie że $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$.*

*Dowód.* Jeżeli $X = X^+ \cup X^-$ jest rozkładem Hahna dla miary znakowanej $\alpha$ to wystarczy zdefiniować

$$\alpha^+(A) = \alpha(A \cap X^+), \quad \alpha^-(A) = -\alpha(A \cap X^-),$$

dla $A \in \Sigma$. Wtedy $\alpha^+$ i $\alpha^-$ są przeliczalnie addytywne i nieujemne, a więc są miarami; dla dowolnego $A \in \Sigma$,

$$\alpha(A) = \alpha(A \cap X^+) + \alpha(A \cap X^-) = \alpha^+(A) - \alpha^-(A);$$

w ten sposób dowód został zakończony. $\diamondsuit$

## 5.2 Absolutna ciągłość i singularność miar

Powróćmy do dwóch miar $\mu$ i $\nu$, określonych na tym samym $\sigma$-ciele $\Sigma$ podzbiorów przestrzeni $X$. Następujące dwie definicje określają związki, jakie mogą zachodzić pomiędzy tymi miarami.

**Definicja 5.2.1** *Mówimy, że miara $\nu$ jest absolutnie ciągła względem miary $\mu$, jeżeli dla wszystkich $A \in \Sigma$ zachodzi implikacja*

$$\text{jeżeli} \quad \mu(A) = 0 \quad \text{to} \quad \nu(A) = 0.$$

*Relację absolutnej ciągłości miar oznaczamy przez $\nu \ll \mu$.*

**Definicja 5.2.2** *Mówimy, że miara $\nu$ jest singularna względem miary $\mu$, jeżeli istnieją $A, B \in \Sigma$, takie że $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A) = 0$ i $\nu(B) = 0$. Relację singularności miar oznaczamy przez $\nu \perp \mu$.*

Zauważmy, że obie własności są w pewnym sensie przeciwstawne, patrz Zadanie 5.5.5.

**Przykład 5.2.3** Jeżeli $\nu$ dana jest przez całkę

$$\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

z nieujemnej funkcji mierzalnej $f$, por. Twierdzenie 3.3.5, to $\nu \ll \mu$, bo całka po zbiorze miary zero jest równa zero.

Prostym przykładem singularności miar jest $\lambda \perp \delta_x$. gdzie $\delta_x$ jest deltą Diraca w punkcie $x \in \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Odnotujmy, że rozkład Jordana $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$ był tak zdefiniowany, że $\alpha^+ \perp \alpha^-$; nietrudno sprawdzić, że jest to jedyny rozkład miary znakowanej na różnice dwóch miar wzajemnie singularnych.

**Definicja 5.2.4** *Dla miary znakowanej $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$ przyjmujemy*

$$|\alpha| = \alpha^+ + \alpha^-;$$

*a miarę $|\alpha|$ nazywamy* absolutnym wahaniem *miary znakowanej $\alpha$.*

*Dla dwóch miar znakowanych $\alpha$ i $\beta$ określonych na tym samym $\sigma$-ciele $\Sigma$ przyjmujemy, że $\alpha \ll \beta$ gdy $|\alpha| \ll |\beta|$; podobnie $\alpha \perp \beta$ jeżeli $|\alpha| \perp |\beta|$.*

Nietrudno jest wysłowić warunki $|\alpha| \ll |\beta|$ i $|\alpha| \perp |\beta|$ w języku miar $\alpha^+, \alpha^-$ oraz $\beta^+, \beta^-$, patrz Zadanie 5.5.6.

Definicja absolutnej ciągłości miar ma swoje przełożenie na warunek, który trochę uzasadnia nazwę tej relacji.

**Lemat 5.2.5** *Jeżeli $\nu$ jest miarą skończoną na $\Sigma$ to dla dowolnej miary $\mu$ na $\Sigma$ warunek $\nu \ll \mu$ jest równoważny warunkowi*

$$(*) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta)(\forall A \in \Sigma)\mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon.$$

*Dowód.* Dostateczność warunku $(*)$ jest oczywista. Załóżmy, że $(*)$ nie zachodzi; wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ oraz zbiory $A_n \in \Sigma$, takie że $\mu(A_n) < 1/2^n$ i $\nu(A_n) \geqslant \varepsilon$. Wtedy dla $A = \limsup_n A_n$ mamy $\mu(A) = 0$, jako że

$$\mu(A) \leqslant \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} 1/2^k = 1/2^{n-1}$$

dla każdego $n$. Z drugiej strony z ciągłości miary skończonej $\nu$ z góry możemy wnioskować, że $\nu(A) \geqslant \varepsilon$, więc $\nu$ nie jest absolutnie ciągła względem $\mu$. $\diamondsuit$

## 5.3 Twierdzenie Radona-Nikodyma

Tytułowe twierdzenie to po prostu odwrócenie uwagi z Przykładu 5.2.4: każda miara absolutnie ciągła jest dana przez całkę (przy dość ogólnych założeniach). Przed udowodnieniem tego podstawowego i nieoczywistego faktu podamy pewien lemat techniczny, potrzebny w głównym dowodzie.

**Lemat 5.3.1** *Niech $\mu$ i $\nu$ będą skończonymi miarami na $\Sigma$; załóżmy, że $\nu \neq 0$ i $\nu \ll \mu$. Wtedy istnieje $P \in \Sigma$, taki że $\mu(P) > 0$ i $P$ jest pozytywny dla miary znakowanej $\nu - \varepsilon\mu$, to znaczy $\nu(B) \geqslant \varepsilon\mu(B)$ dla każdego mierzalnego $B \subseteq P$.*

*Dowód.* Dla każdego $n$ możemy rozważyć miarę znakowaną $\nu - (1/n)\mu$ i odpowiadający jej rozkład Hahna przestrzeni $X = X_n^+ \cup X_n^-$ jak w Twierdzeniu 5.1.2. Niech

$$A = \bigcup_n X_n^+, \quad B = \bigcap_n X_n^-.$$

Wtedy $B \subseteq X_n^-$ dla każdego $n$ więc $\nu(B) - (1/n)\mu(B) \leqslant 0$, co daje $\nu(B) = 0$. Ponieważ $\nu(X) > 0$ i $X = A \cup B$ więc $\nu(A) > 0$ i także, z warunku $\nu \ll \mu$, $\mu(A) > 0$. Istnieje zatem $n$, takie że $\mu(X_n^+) > 0$; wtedy $\varepsilon = 1/n$ oraz $P = X_n^+$ spełniają tezę. $\diamondsuit$

**Twierdzenie 5.3.2 (Radona-Nikodyma)** *Niech $(X, \Sigma, \mu)$ będzie $\sigma$-skończoną przestrzenią miarową i niech $\nu$ będzie taką miarą znakowaną na $\Sigma$, że $|\nu|$ jest $\sigma$-skończona. Jeżeli $\nu \ll \mu$ to istnieje mierzalna funkcja $f : X \to \mathbb{R}$, taka że dla wszystkich $A \in \Sigma$*

$$\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

*Dowód.* Zauważmy przede wszystkim, że wystarczy udowodnić twierdzenie dla miary $\nu$ nieujemnej — w ogólnym przypadku miary znakowanej zastosujemy tę wersję do $\nu^+$ i $\nu^-$. Ponadto możemy dodatkowo założyć, że obie miary $\mu$ i $\nu$ są skończone — w przypadku $\sigma$-skończonym będziemy mogli zapisać $X$ jako rozłączną sumę $X = \bigcup_n X_n$, gdzie $\mu(X_n), \nu(X_n) < \infty$ i zdefiniować odpowiednią funkcję na każdej części $X_n$ z osobna.

Niech $\mathcal{H}$ będzie rodziną wszystkich mierzalnych funkcji $h \geqslant 0$, takich że dla każdego $A \in \Sigma$ zachodzi nierówność

$$\int_A h \, \mathrm{d}\mu \leqslant \nu(A).$$

Wykażemy, że w rodzinie $\mathcal{H}$ istnieje funkcja, w pewnym sensie, maksymalna i że spełnia ona tezę twierdzenia. Niech

$$r = \sup\{\int_X h \, \mathrm{d}\mu : h \in \mathcal{H}\};$$

wtedy istnieje ciąg $h_n \in \mathcal{H}$, taki że $\lim_n \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu = r$. Rozważmy funkcje $g_n$ , gdzie

$$g_n = \max_{i \leqslant n} h_i.$$

Dowolny zbiór $A$ możemy zapisać jako rozłączną sumę $A = \bigcup_{i \leqslant n} A_i$, gdzie $g_n = h_i$ na $A_i$; wtedy

$$\int_A g_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i \leqslant n} \int_{A_i} h_i \, \mathrm{d}\mu \leqslant \sum_{i \leqslant n} \nu(A_i) = \nu(A).$$

Pokazuje to, że także $g_n \in \mathcal{H}$; teraz biorąc granicę punktową $f = \lim_n g_n$ mamy $f \in \mathcal{H}$ i $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = r$ z twierdzenia o zbieżności monotonicznej. Zauważmy, że $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \nu(X) < \infty$, więc $f$ jest funkcją skończoną $\nu$-prawie wszędzie.

Aby przekonać się, że $f$ jest poszukiwaną funkcją sprawdzimy, że miara $\nu_0$, dana wzorem

$$\nu_0(A) = \nu(A) - \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

dla $A \in \Sigma$ jest tożsamościowo równa zeru. W przeciwnym przypadku, gdy $\nu_0(X) > 0$, na mocy Lematu 5.3.1, istnieje $\varepsilon > 0$ i $P \in \Sigma$, takie że

$$\varepsilon\mu(P \cap A) \leqslant \nu_0(P \cap A) = \nu(P \cap A) - \int_{P \cap A} f \, \mathrm{d}\mu,$$

dla wszystkich $A \in \Sigma$. Rozważmy funkcję $g = f + \varepsilon\chi_P$ i $A \in \Sigma$; korzystając z ostatniej nierówności, mamy

$$\int_A g \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(P \cap A) \leqslant$$

$$\leqslant \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \nu(P \cap A) - \int_{P\cap A} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{A\setminus P} f \, \mathrm{d}\mu + \nu(P\cap A) \leqslant \nu(A\setminus P) + \nu(P\cap A) = \nu(A).$$

Stąd $g \in \mathcal{H}$, ale $\int_X g \, \mathrm{d}\mu > \int_X f \, \mathrm{d}\mu = r$, co jest sprzecznością z definicją liczby $r$. $\diamondsuit$

Twierdzenie nie musi zachodzić dla miar $\mu$, które nie są $\sigma$-skończone, patrz Zadanie 5.5.7. Funkcja $f$ spełniająca tezę twierdzenia Radona-Nikodyma bywa oznaczana przez

$$f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu},$$

funkcja ta nosi nazwę *pochodnej Radona-Nikodyma miary* $\nu$ *względem miary* $\mu$. Oznaczenie na tę pochodną jest przydatne w zapamiętywaniu niektórych wzorów, patrz Zadania 5.5.9 i 5.3.2 poniżej. Zauważmy, że pochodna jest wyznaczona niejednoznacznie, ale $\nu$-prawie wszędzie.

**Wniosek 5.3.3** *Dla miar* $\mu$ *i* $\nu$ *jak w Twierdzeniu 5.3.2, wzór*

$$\int_X g \, \mathrm{d}\nu = \int_X g \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu,$$

*zachodzi dla każdej* $\nu$*-całkowalnej funkcji* $g$.

*Dowód.* Dla $g = \chi_A$ wzór jest konsekwencją definicji pochodnej RN. Z addytywności całki łatwo wynioskować wzór dla funkcji prostych. Z twierdzenia o zbieżności monotonicznej otrzymamy tezę dla funkcji nieujemnych itd. (czytelnik sam uzupełni szczegóły, por. Zadanie 5.5.8). $\diamondsuit$

Następujący prosty wniosek jest wykorzystywany w rachunku prawdopodobieństwa do definiowania tak zwanych warunkowych wartości oczekiwanych.

**Wniosek 5.3.4** *Niech* $(X, \Sigma, \mu)$ *będzie* $\sigma$*-skończoną przestrzenią miarową i niech* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *będzie dowolnym* $\sigma$*-ciałem. Wtedy dla każdego* $A \in \Sigma$ *istnieje* $\Sigma_0$*-mierzalna funkcja* $f$*, taka że*

$$\mu(A \cap B) = \int_B f \, \mathrm{d}\mu,$$

*dla wszystkich* $B \in \Sigma_0$.

*Dowód.* Wystarczy zastosować Twierdzenie 5.3.2 do miary $\mu$ na $\Sigma_0$ i $\nu$ danej wzorem $\nu(B) = \mu(A \cap B)$ dla $B \in \Sigma_0$. $\diamondsuit$

Z twierdzenia Radona-Nikodyma nietrudno wywnioskować następujące twierdzenie o rozkładzie miar.

**Twierdzenie 5.3.5** *Niech $\mu$ i $\nu$ będą $\sigma$-skończonymi miarami, określonymi na tym samym $\sigma$-ciele. Wtedy istnieje rozkład $\nu = \nu_a + \nu_s$, gdzie $\nu_a \ll \mu$ i $\nu_s \perp \mu$.*

*Dowód.* Mamy $\nu \leqslant \mu + \nu$ więc tym bardziej $\nu \ll \mu + \nu$; niech $f$ będzie pochodną RN miary $\nu$ względem miary $\mu + \nu$. Zauważmy, że wtedy $0 \leqslant f \leqslant 1$ $\nu$-prawie wszędzie. Niech $X_1 = \{x : f(x) < 1\}$ i $X_2 = \{x : f(x) = 1\}$. Ponieważ

$$\nu(X_2) = \int_{X_2} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{X_2} f \, \mathrm{d}\nu = \mu(X_2) + \nu(X_2),$$

więc $\mu(X_2) = 0$. Definiujemy

$$\nu_a(A) = \nu(A \cap X_1), \quad \nu_s(A) = \nu(A \cap X_2) \quad \text{dla } A \in \Sigma.$$

Wtedy oczywiście $\nu = \nu_a + \nu_s$ i $\nu_s \perp \mu$, jako że $\nu_s$ jest skupiona na $X_2$. Pozostaje sprawdzić, że $\mu_a \ll \mu$. Niech $\mu(A) = 0$. Wtedy

$$\nu_a(A) = \nu(A \cap X_1) = \int_{A\cap X_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{A\cap X_1} f \, \mathrm{d}\nu = \int_{A\cap X_1} f \, \mathrm{d}\nu.$$

Stąd

$$\int_{A\cap X_1} (1 - f) \, \mathrm{d}\nu = 0,$$

co implikuje $\nu_a(A) = \nu(A \cap X_1) = 0$, jako że $1 - f > 0$ na zbiorze $X_1$. ♢

## 5.4 Miary na prostej rzeczywistej

W tej części dokonamy przeglądu miar $\nu$ określonych na $\sigma$-ciele $Bor(\mathbb{R})$, które są *lokalnie skończone*, to znaczy przyjmują skończone wartości na każdym przedziale. Zauważmy, że taka miara $\nu$ jest automatycznie $\sigma$-skończona. Własność lokalnej skończoności jest jednak istotnie silniejsza: biorąc

$$\nu = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \delta_q$$

możemy łatwo określić miarę $\sigma$-skończoną, która przyjmuje wartość $\infty$ na każdym niepustym przedziale.

Jeżeli $\nu \ll \lambda$ to Twierdzenie 5.3.2 i wzór w 5.3.3 pozwalają zredukować całkę względem $\nu$ do klasycznej całki Lebesgue'a. Wiele podstawowych miar probabilistycznych na prostej jest absolutnie ciągłych względem $\lambda$; na przykład rozkład normalny (miara Gaussa), czyli podstawowa miara probabilistyczna, jest zadana jako

$$\nu(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

W ogólnym przypadku, każdą $\nu$ możemy przedstawić jako $\nu = \nu_a + \nu_s$, gdzie, zgodnie z Twierdzeniem 5.3.5, $\nu_a \ll \lambda$ i $\nu_s \perp \lambda$. Rozważmy w dalszym ciągu przypadek $\nu \perp \lambda$. Taka miara $\nu$ może być dodatnia tylko na przeliczalnej ilości punktów. Możemy więc napisać

$$\nu = \sum_n c_n \delta_{t_n} + \nu',$$

dla pewnych $c_n \geqslant 0$, pewnych punktów $t_n \in \mathbb{R}$, gdzie miara $\nu'$ spełnia już warunek $\mu'\{t\} = 0$ dla każdego $t$. Klasycznym przykładem miary skupionej na zbiorze przeliczalnym jest rozkład Poissona $\nu$, czyli miara probabilistyczna skupiona na liczbach całkowitych nieujemnych i spełniająca, dla ustalonego parametru $s \geqslant 0$, warunek

$$\nu\{n\} = \frac{e^{-s}s^n}{n!}.$$

Zauważmy, że dla miary postaci $\mu = \sum_n c_n \delta_{t_n}$, całka redukuje się do sumy szeregu:

$$\int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\mu = \sum_n c_n g(t_n).$$

Pozostałe miary mają tę własność, że znikaja na punktach (czyli są bezatomowe, por. Zadanie 5.5.14), ale są skupione na zbiorze miary Lebesgue'a zero. Takie miary rzeczywiście istnieją, jak mogliśmy przekonac się w 4.5.

Wszystkie miary lokalnie skończone na prostej można wygenerować w opisany poniżej sposób. Zacznijmy od prostej uwagi.

**Lemat 5.4.1** *Jeżeli $\mu$ i $\nu$ są miarami na $Bor(\mathbb{R})$ i dla każdego $a < b$ mamy*

$$\mu[a,b) = \nu[a,b) < \infty,$$

*to $\mu = \nu$.*

*Dowód.* Rodzina

$$\{B \in Bor(\mathbb{R}) : B \subseteq [0,1], \mu(B) = \nu(B)\}$$

jest klasą monotoniczną więc $\mu(B) = \nu(B)$ dla wszystkich borelowskich podzbiorów $[0,1)$ z Twierdzenia 1.7.2. Tę uwagę można odnieść do każdego odcinka postaci $[n, n+1)$. Ostatecznie, dla $B \in Bor(\mathbb{R})$ mamy

$$\mu(B) = \sum_n \mu(B \cap [n, n+1)) = \sum_n \nu(B \cap [n, n+1)) = \nu(B).$$

$\diamondsuit$

Niech $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą; przyjmijmy

$$\lambda_F([a,b)) = F(b) - F(a),$$

dla $a < b$. Tę definicję można w oczywisty sposób rozszerzyć na elementy pierścienia przedziałów, rozważanego w rodziale 1. Jesli funkcja zbioru $\lambda_F$ ma być przeliczalnie addytywna to konieczne jest, aby funkcja $F$ była lewostronnie ciągła, ponieważ wtedy dla ciągu $h_n > 0$, $h_n \to 0$

$$F(x) - F(x - h_n) = \lambda_F[x - h_n, x) \to 0,$$

jako że przekrój $\bigcap_n [x - h_n, x)$ jest pusty. Jak się okazuje dla funkcji lewostronnie ciągłej $F$, funkcja zbioru $\lambda_F$ jest przeliczalnie addytywna na pierścieniu odcinków i rozszerza się jednoznacznie do miary borelowskiej na prostej, co można wykazać analogicznie, jak w przypadku miary Lebesgue'a. Istnieje jednak w tej chwili znacznie krótsza droga.

**Twierdzenie 5.4.2** *Dla każdej lewostronnie ciągłej niemalejącej funkcji $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje jedyna miara (Lebesgue'a-Stieltjesa) $\lambda_F$ określona na $Bor(\mathbb{R})$, taka że*

$$\lambda_F[a, b) = F(b) - F(a) \quad \textit{dla } a < b.$$

*Dowód.* Załóżmy, dla ustalenia uwagi, że

$$M = \lim_{x\to\infty} F(x) = \infty, \quad K = \lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty.$$

Niech funkcja $h$ będzie zdefiniowana wzorem

$$h(y) = \sup\{x : F(x) \leqslant y.\}$$

Wtedy warunek $a \leqslant h(y)$ jest równoważny warunkowi $F(a) \leqslant y$ na mocy lewostronnej ciągłości $F$, natomiast warunek $h(y) < b$ oznacza $y < F(b)$. Tym samym dla $a < b$ mamy

$$h^{-1}\left[[a, b)\right] = [F(a), F(b)).$$

Funkcja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca, a wiec borelowska, patrz Zadanie 2.5.11. Możemy więc rozważyć obraz miary

$$\lambda_F = h[\lambda], \quad \text{gdzie} \quad \lambda_F(B) = \lambda(h^{-1}[B]),$$

dla $B \in Bor(\mathbb{R})$, patrz Zadanie 4.6.16. Wtedy $\lambda_F$ spełnia żądane równanie. Jedyność otrzymujemy natychmiast z Lematu 5.4.1. $\diamondsuit$

Zauważmy, że każda miara lokalnie skończona $\mu$ na prostej jest postaci $\mu = \lambda_F$ dla pewnej funkcji $F$ — wystarczy przyjąć, że $F(x) = \mu[0, x)$ dla $x \geqslant 0$ i $F(x) = -\mu[x, 0)$ poza tym, por. Zadanie 5.5.12. Należy zaznaczyć, że wszędzie tutaj stosowaliśmy zasadę rozważania odcinków postaci $[a, b)$ przy definiowaniu miar postaci $\lambda_F$; trzeba mieć świadomość, że równie dobrze można rozważać wzór postaci $\lambda_F(a, b] = F(b) - F(a)$ — wtedy $F$ jest oczywiście prawostronnie ciągła.

W niektórych przypadkach całka względem miary $\lambda_F$ wyraża się w prosty sposób.

**Twierdzenie 5.4.3** *Jeżeli funkcja niemalejąca $F$ ma ciągłą pochodną to*

$$\int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\lambda_F = \int_{\mathbb{R}} g \cdot F' \, \mathrm{d}\lambda,$$

*dla każdej $\lambda_F$-całkowalnej funkcji $g$.*

*Dowód.* Jeżeli $g = \chi_{[a,b)}$ dla $a < b$ to po lewej stronie wzoru mamy $\lambda_F[a,b) = F(b) - F(a)$, a po prawej

$$\int_{\mathbb{R}} g \cdot F' \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b F'(x) \, \mathrm{d}x,$$

czyli tyle samo. Mamy $F' \geqslant 0$ i możemy zdefiniować miarę $\mu$ wzorem

$$\mu(B) = \int_B F' \, \mathrm{d}\lambda, \quad B \in Bor(\mathbb{R}).$$

Jak dotąd sprawdziliśmy, że $\mu = \lambda_F$ na odcinkach, a więc $\mu = \lambda_F$ z Lematu 5.4.1. Innymi słowy, wzór z twierdzenia jest więc spełniony dla każdej funkcji $g = \chi_B$, gdzie $B \in Bor(\mathbb{R})$. Dalej rozszerzamy wzór standardowo na funkcje proste oraz mierzalne (por. dowód 5.3.2). $\diamondsuit$

## 5.5 Zadania

**5.5.1** Zauważyć, że rozkład Hahna $X = X^+ \cup X^-$ dla miary znakowanej $\kappa$ jest "jednoznaczny z dokładnością do zbiorów miary zero" (co to znaczy?). Czy rozkład $\alpha$ na różnicę dwóch miar jest jedyny?

**5.5.2** Zauważyć, że jeśli miara znakowana $\nu$ przyjmuje tylko wartości rzeczywiste, to jest ograniczona.

**5.5.3** Niech $f$ będzie taką funkcją mierzalną, że przynajmniej jedna z funkcji $f^+, f^-$ jest $\mu$–całkowalna i niech $\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$ dla zbiorów $A \in \Sigma$ (tutaj $\mu$ jest miarą na $\Sigma$). Zapisać $\nu^+, \nu^-$ oraz $|\nu|$ za pomocą całek.

**5.5.4** Zauważyć, że dla miary znakowanej $\nu$, $|\nu|(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\nu(B) = 0$ dla każdego $B \subseteq A$ $(A, B \in \Sigma)$.

**5.5.5** Zauważyć, że jeżeli $\nu \ll \mu$ i $\nu \perp \mu$ to $\nu = 0$.

**5.5.6** Zauważyć, że $\nu \ll \mu$ wtedy i tylko wtedy gdy $\nu^+, \nu^- \ll \mu$ i że podobną własność ma relacja singularności miar.

**5.5.7** Twierdzenie RN nie musi zachodzić dla $\mu$, które nie są $\sigma$–skończone. Niech $\Sigma$ będzie $\sigma$–ciałem generowanym przez przeliczalne podzbiory $[0, 1]$; rozważyć miarę liczącą $\mu$ na $\Sigma$ oraz zerojedynkową miarę $\nu$ na $\Sigma$.

**5.5.8** Uzupełnić szczegóły dowodu Wniosku 5.3.2 według podanego szkicu.

**5.5.9** Niech $\mu, \nu$ będą $\sigma$–skończonymi miarami na $\Sigma$, takimi że $\nu \ll \mu$ i $\mu \ll \nu$. Wykazać, że prawie wszędzie zachodzi zależność

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = 1/\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}.$$

**5.5.10** Niech $\mu, \nu$ będą miarami $\sigma$–skończonymi, $\nu \ll \mu$ i niech funkcja $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ będzie wszędzie dodatnia. Sprawdzić, że $\mu \ll \nu$.

**5.5.11** Niech $(X, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną i niech $\mathcal{A}$ będzie $\sigma$–ciałem zawartym w $\Sigma$. Wykazać, że dla każdej $\Sigma$–mierzalnej funkcji całkowalnej $f : X \to \mathbb{R}$ istnieje $\mathcal{A}$–mierzalna funkcja $g$, taka że dla każdego $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A g \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

(Taka $g = E(f|\mathcal{A})$ nazywa się w probabilistyce warunkową wartością oczekiwaną.)

**5.5.12** Dystrybuantą miary probabilistycznej $\mu$ na $Bor(\mathbb{R})$ nazywamy funkcję $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, daną wzorem $F_\mu(x) = \mu(-\infty, x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, że $F_\mu$ jest niemalejącą funkcją lewostronnie ciągłą, przy czym $\lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = 1$.

Uwaga: Czasami przyjmuje się definicję $F_\mu(x) = \mu(-\infty, x]$; jak wpływa to na własności $F_\mu$?

**5.5.13** Wykazać, że dystrybuanta $F_\mu$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy $\mu$ znika na punktach.

**5.5.14** Miara znikająca na punktach bywa nazywana miarą ciągłą. Wykazać, że probabilistyczna miara $\mu$ na $Bor(\mathbb{R})$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezatomowa.

**5.5.15** Jak juz wiemy (!) na zbiorze trójkowym Cantora $C$ istnieje miara probabilistyczna $\mu$, która znika na punktach. Niech $F(x) = \mu((-\infty, x))$ będzie dystrybuantą tej miary. Zauważyć, że $F$ jest funkcją ciągłą, oraz $F[C] = [0,1]$. Wywnioskować stąd, że obraz zbioru miary zero przez funkcję ciągłą nie musi być miary zero, a nawet nie musi być mierzalny.

**5.5.16** Obliczyć (albo sprowadzić do znanej całki); podać uzasadnienia rachunków:

*(i)* $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{d}\mu$ gdzie $\mu = \delta_0$, $\mu = \delta_0 + \delta_1$, $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ (tutaj $\delta_x$ oznacza miarę probabilistyczną skupioną w punkcie $x$).

*(ii)* $\int_{[0,1]} x^2\ \mathrm{d}\lambda$;

*(iii)* $\int_{[0,1]} f\ \mathrm{d}\lambda$; gdzie $f(x) = x$ dla $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{Q}$;

*(iv)* $\int_{[0,2\pi]} \sin x\ \mathrm{d}\mu$, gdzie $\mu(A) = \int_A x^2\ \mathrm{d}\lambda(x)$;

*(v)* $\int_{\mathbb{R}} f\ \mathrm{d}\lambda$; gdzie $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ dla $x \notin \mathbb{Q}$;

*(vi)* $\int_{\mathbb{R}} 1/(x^2+1)\ \mathrm{d}\lambda(x)$;

*(vii)* $\int_{\mathbb{R}} \cos x\ \mathrm{d}\mu$, gdzie $\mu(A) = \int_A 1/(x^2+1)\ \mathrm{d}\lambda(x)$;

*(viii)* $\int_{\mathbb{R}} \cos x\ \mathrm{d}\mu$, gdzie $\mu$ jest taka że $\mu(-\infty, x) = \arctan x + \pi/2$;

*(ix)* $\int_{[0,\infty)} [x]\ \mathrm{d}\mu$, gdzie $\mu$ jest taka że $\mu[n, n+1) = n^{-3}$;

*(x)* $\int_{\mathbb{R}} (x - [x])\ \mathrm{d}\mu$, gdzie

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n+1/n};$$

*(xi)*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{n^2x+2}{n^2x+n+3}\ \mathrm{d}\lambda(x) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty]} \frac{n}{xn^2+3}\ \mathrm{d}\lambda(x).$$

**5.5.17** Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie mierzalną funkcją na przestrzeni miarowej $(X, \Sigma, \mu)$. Wtedy wzór $\nu(B) = \mu(f^{-1}[B])$ definiuje miarę borelowską na $\mathbb{R}$, por. Zadanie 16 z poprzedniego rozdziału (taka miara w probabilistyce nazywa się rozkładem zmiennej losowej).

Udowodnić, że $\int_X f\ \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} x\ \mathrm{d}\nu(x)$ (o ile $f$ jest całkowalna).

Wskazówka: Rozważyć najpierw $f = \chi_A$ dla $A \in \Sigma$; potem funkcje proste itd.

## 5.6 Problemy

**5.6.A** Niech $(X, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią miarową. Dla dowolnego $Z \subseteq X$ piszemy $\mu^*(Z) = \inf\{\mu(A) : A \in \Sigma, Z \subseteq A\}$. Zauważyć, że $\mu^*$ jest miarą zewnętrzną (jest przeliczalnie podaddytywna i monotoniczna), ale na ogół nie jest addytywna.

Udowodnić, że dla ustalonego $Z \subseteq X$ wzór $\nu(A \cap Z) = \mu^*(A \cap Z)$ definiuje miarę na $\sigma$–ciele $\{A \cap Z : A \in \Sigma\}$ podzbiorów $Z$.

**5.6.B** Istnieje przestrzeń metryczna $Z \subseteq [0,1]$ i probabilistyczna miara $\nu$ na $Bor(Z)$, taka że $\nu(K) = 0$ dla $K \subseteq Z$ zwartych.

WSKAZÓWKA: Wziąć na początek $Z \subseteq [0,1]$ niemierzalny w sensie Lebesgue'a i miarę $\nu$ z poprzedniego problemu.

**5.6.C** Niech $(X, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Jak wiemy, $A \sim B \iff \mu(A \triangle B) = 0$ definiuje relację równoważności. Niech $\mathfrak{B} = \{[A] : A \in \Sigma\}$ oznacza rodzinę klas abstrakcji tej relacji.

Zauważyć, że na $\mathfrak{B}$ można wprowadzić naturalne działania

$$[A] \vee [B] = [A \cup B], \quad [A] \wedge [B] = [A \cap B], \quad -[A] = [A^c].$$

Wtedy $\mathfrak{B}$ staje się algebrą Boole'a $(\mathfrak{B}, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ (to znaczy, że wprowadzone działania maja takie same własności jak "zwykłe" działania mnogościowe; $0 = [\emptyset]$, $1 = [X]$). Tak zdefiniowana algebrę nazywamy algebrą miary.

**5.6.D** Sprawdzić, że algebra miary $\mathfrak{B}$ jest przestrzenią metryczną, gdzie metrykę zadajemy wzorem $d([A],[B]) = \mu(A \triangle B)$. Udowodnić, że metryka ta jest zupełna.

**5.6.E** Algebra miary Lebesgue'a $\lambda$ na $[0,1]$ jest przestrzenią ośrodkową.

# Rozdział 6

# Przestrzenie funkcji całkowalnych

*Moim największym odkryciem matematycznym jest Stefan Banach.*
Hugo Steinhaus

W rozdziale ostatnim wprowadzimy klasyczne przestrzenie Banacha postaci $L_p(\mu)$ i wyprowadzimy podstawowe ich własności. Oprócz tego rozważymy ogólne własności miar na przestrzeniach euklidesowych i zastosujemy je do znalezienia zbiorów gęstych w przestrzeniach funkcji całkowalnych.

## 6.1 Klasyczne nierówności

W podrozdziale wyprowadzimy klasyczne nierówności całkowe Cauchy'ego-Höldera oraz Minkowskiego. Niech, po raz kolejny, $(X, \Sigma, \mu)$ będzie ustaloną przestrzenią miarową $\sigma$-skończoną; dalej milcząco przyjmujemy, że wszystkie rozważane funkcje są mierzalne względem $\Sigma$.

**Lemat 6.1.1** *Dla dowolnych liczb dodatnich $a, b, p, q$, jeżeli $1/p + 1/q = 1$ to*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Dowód.* Rozważmy funkcję $f(t) = t^{p-1}$ na odcinku $[0, a]$. Z założenia $p > 1$ więc istnieje funkcja odwrotna do $f$ dana wzorem $g(s) = s^{1/(p-1)}$. Zauważmy, że pola pod wykresami funkcji $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ i $g : [0, b] \to \mathbb{R}$ pokrywają kwadrat $[0, a] \times [0, b]$. Stąd

$$ab \leqslant \int_0^a t^{p-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^b s^{1/(p-1)}\,\mathrm{d}s = \left[\frac{t^p}{p}\right]_0^a + \left[\frac{s^q}{q}\right]_0^b = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

ponieważ $1 + 1/(p-1) = p/(p-1) = q$. $\diamondsuit$

**Definicja 6.1.2** *Dla dowolnej funkcji (całkowalnej bądź nie) $f : X \to \mathbb{R}$ i $p \geqslant 1$ wyrażenie*

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$$

*nazywamy $p$-tą normą całkową funkcji.*

**Twierdzenie 6.1.3 (Nierówność Cauchy-ego-Höldera)** *Dla dowolnych funkcji $f, g$ i liczb $p, q > 0$, takich że $1/p + 1/q = 1$, zachodzi nierówność*

$$\int_X |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu \leqslant ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

*Dowód.* Oczywiście nierówność jest prawdziwa, gdy jedna z norm jest nieskończona. W przypadku skończonym, dla dowolnego $x \in X$ podstawmy

$$a = \frac{|f(x)|}{||f||_p}, \quad b = \frac{|g(x)|}{||g||_q}$$

do nierówności w Lemacie 6.1.1; wtedy otrzymamy wszędzie nierówność

$$\frac{|fg|}{||f||_p \cdot ||g||_q} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{|f|^p}{||f||_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g|^q}{||g||_q^q}.$$

Całkując tę ostatnią nierówność względem miary otrzymujemy

$$\frac{\int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu}{||f||_p \cdot ||g||_q} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

co kończy dowód. $\diamondsuit$

**Twierdzenie 6.1.4 (Nierówność Minkowskiego)** *Dla dowolnych funkcji $f, g$ i liczby $p \geqslant 1$, zachodzi nierówność*

$$||f + g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p.$$

*Dowód.* Nierówność oczywiście zachodzi dla $p = 1$ (patrz Twierdzenie 3.2.3). Dla $p > 1$ możemy dobrać liczbę $q$ spełniającą warunwk $1/p + 1/q = 1$. Wtedy, uwzględniając $(p-1)q = p$ i stosując nierówność z 6.1.3,

$$||f+g||^p = \int_X |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \leqslant$$

$$||f||_p \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/q} + ||g||_p \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/q} =$$

$$= (||f||_p + ||g||_p)) \cdot \left(\int_X |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = (||f||_p + ||g||_p)) \cdot ||f+g||^{p/q}.$$

Teraz, dzieląc (skrajne) strony nierówności przez $||f+g||_p^{p/q}$, otrzymujemy nierówność Minkowskiego. Należy jednak zaznaczyć, że dla poprawności tego argumentu konieczne jest, aby sprawdzić, że jeśli $||f||_p, ||g||_p < \infty$ to $||f+g||_p < \infty$, patrz Zadanie 6.6.1. $\diamondsuit$

## 6.2 Przestrzenie Banacha funkcji całkowalnych

Niech $E$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych. Oznacza to, że w $E$ określone jest działanie dodawania (wektorów) oraz mnożenia wektorów przez skalary z ciała, przy czym zachowane są aksjomaty dobrze znane z algebry liniowej przestrzeni euklidesowych.

**Definicja 6.2.1** *Funkcję $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}_+$ nazywamy normą jeżeli dla dowolnych $x, y \in E$ i $c$ z ciała skalarów zachodzą zależności*

*(i)* $||x|| = 0$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $x = 0$*;*

*(ii)* $||c \cdot x|| = |c| \cdot ||x||$*;*

*(iii)* $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Warunek (ii) w definicji nazywa się jednorodnością, a warunek (iii) oczywiście nierównością trójkąta. W każdej przestrzeni unormowanej $(E, ||\cdot||)$ możemy zdefiniować metrykę wzorem

$$\rho(x, y) = ||x - y||,$$

dla $x, y \in E$. Zauważmy, że tak właśnie definiowana jest metryka w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, gdzie norma euklidesowa zadana jest wzorem

$$||x|| = \left( \sum_{i \leqslant n} |x|^2 \right)^{1/2}.$$

**Definicja 6.2.2** *Przestrzeń unormowaną $(E, ||\cdot||)$ nazywamy przestrzenią Banacha, jeżeli metryka wyznaczona przez normę jest zupełna.*

Wspomniana zupełność oznacza, że dla ciągu $x_n$ wektorów z $E$, spełniającego warunek Cauchy'ego

$$\lim_{n,k\to\infty} ||x_n - x_k|| = 0,$$

istnieje $x \in E$, taki że $||x_n - x|| \to 0$ (czyli granica tego ciągu). Przestrzenie euklidesowe są więc przestrzeniami Banacha, ale w analizie funkcjonalnej rozważa się wiele przestrzeni Banacha nieskończenie wymiarowych, na ogół złożonych z pewnych funkcji. Na przykład norma $||f|| = \sup_t |f(t)|$ czyni z przestrzeni funkcji ciągłych $C[0, 1]$ przestrzeń Banacha. Naszym celem będzie wprowadzenie przestrzeni Banacha funkcji całkowalnych.

Funkcja $||\cdot||_p$ zdefiniowana w 6.1.2 nie bez powodu nosi nazwę $p$-tej normy: nierówność Minkowskiego 6.1.4 to po prostu nierówność trójkąta dla $||\cdot||_p$. Jednorodność $||\cdot||_p$ wynika natychmiast z własności całki. Jedyny problem, to taki, że, formalnie rzecz biorąc, $||\cdot||_p$ nie spełnia pierwszego aksjomatu normy, jako że $||f||_p = 0$ oznacza jedynie, że $f = 0$ prawie wszędzie. Aby pokonać tę przeszkodę dokonujemy następującego zabiegu.

**Definicja 6.2.3** *Dla ustalonej przestrzeni miarowej $(X, \Sigma, \mu)$ symbolem $L_p(\mu)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych $f : X \to \mathbb{R}$, dla których $||f||_p < \infty$. Przyjmujemy przy tym zasadę, że utożsamiamy elementy $L_p(\mu)$ równe prawie wszędzie.*

Formalnie rzecz biorąc, $L_p(\mu)$ nie składa się więc z funkcji, ale z klas abstrakcji relacji równoważności

$$f = g \text{ prawie wszędzie.}$$

Powszechnie stosuje się jednak umowę, że elementy $L_p(\mu)$ nazywamy po prostu funkcjami; nie prowadzi to do większych niejasności. Tym samym $L_p(\mu)$ jest przestrzenią unormowaną z $p$-normą całkową. $L_p(\mu)$ bywa oznaczana też $L_p(X, \Sigma, \mu)$ lub, w innych przypadkach, $L_p(X)$. Na przykład piszemy najczęściej $L_p[0, 1]$ i $L_p(\mathbb{R})$ dla odpowiednich przestrzeni całkowych względem miary Lebesgue'a na $[0, 1]$ lub $\mathbb{R}$.

**Twierdzenie 6.2.4** *Przestrzeń $L_p(\mu)$ z normą $|| \cdot ||_p$ jest przestrzenią Banacha.*

*Dowód.* Rozważmy $p = 1$. Niech $f_n \in L_1(\mu)$ będzie ciągiem Cauchy'ego, to znaczy

$$\int_X |f_n - f_k| \, \mathrm{d}\mu \to 0,$$

gdy $n, k \to \infty$. Wtedy dla $\varepsilon > 0$ z nierówności Czebyszewa

$$\int_X |f_n - f_k| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon \cdot \mu\{x : |f_n(x) - f_k(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

wynika, że ciąg $f_n$ jest Cauchy'ego według miary. Z Twierdzenia 2.4.6 istnieje więc rosnący ciąg liczb naturalnych $n_k$ i funkcja $f$, taki że $f_{n_k} \to f$ prawie wszędzie. Z kolei z lematu Fatou

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_k \int_X |f_{n_k}| \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

jako że z warunku Cauchy'ego wynika oczywiście ograniczoność ciągu całek $\int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu$. Stosując jeszcze raz lemat Fatou otrzymujemy

$$\int_X |f - f_{n_k}| \, \mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_j |f_{n_j} - f_{n_k}| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_j \int_X |f_{n_j} - f_{n_k}| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon,$$

dla dostatecznie dużych $k$. Ostatecznie, ponieważ

$$\int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X |f - f_{n_k}| \, \mathrm{d}\mu + \int_X |f_{n_k} - f_n| \, \mathrm{d}\mu,$$

więc istotnie $f$ jest granicą ciągu $f_n$ w przestrzeni $L_p(\mu)$.

Dowód dla $p > 1$ jest dość automatyczną modyfikacją przedstawionego argumentu, patrz Zadanie 6.6.2 ♢

Oprócz rzeczywistych przestrzeni funkcji całkowalnych rozważa się ich odpowiedniki zespolone. Dla przestrzeni $(X, \Sigma, \mu)$ i funkcji $f : X \to \mathbb{C}$, powiemy, że $f$ jest funkcją mierzalną gdy $f^{-1}[B] \in \Sigma$ dla każdego borelowskiego podzbioru $\mathbb{C}$ (przypomnijmy, że $\mathbb{C}$ mozna utożsamiać z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Możemy taką funkcję przedstawić w postaci $f = f_1 + i \cdot f_2$ dla funkcji rzeczywistych $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$. Nietrudno sprawdzić, że $f$ jest mierzalna wtedy i tylko wtedy gdy $f_1, f_2$ sa mierzalne, patrz Zadanie 6.6.5. Dla funkcji $f : X \to \mathbb{C}$ mierzalnej jej moduł $|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ jest więc też mierzalny. Funkcja $f$ jest całkowalna przy niezmienionej definicji: $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$, natomiast wzór

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu + i \cdot \int_X f_2 \, \mathrm{d}\mu$$

można przyjąć za definicję całki. Klasyczne nierówności z podrozdziału 6.1 i Twierdzenie 6.2.4 pozostają prawdziwe dla funkcji zespolonych.

## 6.3 Jednakowa całkowalność

Jak widzieliśmy w dowodzie Twierdzenia 6.2.4 zbieżność ciągu $f_n$ do funkcji $f$ w $L_1(\mu)$ pociąga za sobą zbieżność według miary. Prosty przykład

$$f_n = n \cdot \chi_{[0,1/n]}$$

pokazuje, że zbieżność według miary jest jednak istotnie słabsza niż ta w $L_1(\mu)$. W przypadku miary skończonej często stosuje się następujące kryterium zbieżności w $L_1(\mu)$.

Przypomnijmy, że dla funkcji całkowalnej $f : X \to \mathbb{R}$ na przestrzeni miarowej $(X, \Sigma, \mu)$, wzór $\nu(A) = \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu$ określa miarę $\nu$ i $\nu \ll \mu$. Dlatego na mocy Lematu 5.2.5 mamy warunek

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A \in \Sigma) \left[ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon \right].$$

O ciągu funkcji calkowalnych $f_n$ mówimy, że jest on *jednakowo całkowalny* gdy powyższy warunek jest spełniony jednostajnie po $n$, to znaczy

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A \in \Sigma)(\forall n) \left[ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f_n| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon \right].$$

**Twierdzenie 6.3.1** *Jeżeli $\mu(X) < \infty$ to ciąg $f_n$ jest zbieżny w $L_1(\mu)$ wtedy i tylko wtedy gdy ciąg $f_n$ zbiega według miary oraz funkcje $f_n$ są jednakowo całkowalne*

*Dowód.* Niech $\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$ dla $f_n, f \in L_1(\mu)$. Jak poprzednio,

$$\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon \cdot \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

dla każdego $\varepsilon > 0$, co dowodzi, że $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Sprawdźmy zatem jednakową całkowalność. Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ mamy $\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Możemy dobrać $\delta > 0$, takie że dla wszystkich funkcji $h \in \{f, f_1, \ldots, f_{n_0}\}$ zachodzi $\int_A |h| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$ jeśli tylko $\mu(A) < \delta$. Dla $n > n_0$ mamy z kolei

$$\int_A |f_n| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_A |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu + \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu \leqslant 2\varepsilon,$$

co pokazuje, że ciąg $f_n$ jest jednakowo całkowalny.

Udowodnimy przeciwną implikację. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech

$$A_{n,k} = \{x : |f_n(x) - f_k(x)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Wtedy dla dowolnej liczby $\delta > 0$ mamy $\mu(A_{n,k}) < \delta$ dla dużych $n, k$ i dlatego

$$\int_X |f_n - f_k| \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_{n,k}} |f_n - f_k| \, \mathrm{d}\mu + \int_{X \setminus A_{n,k}} |f_n - f_k| \, \mathrm{d}\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_{A_{n,k}} |f_n| \, \mathrm{d}\mu + \int_{A_{n,k}} |f_k| \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon \cdot \mu(X),$$

co, z warunku jednakowej całkowalności, pociąga za sobą $\int_X |f_n - f_k| \, \mathrm{d}\mu \to 0$. Ciąg $f_n$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L_1(\mu)$, a więc jest zbieżny (patrz twierdzenie 6.2.4). $\diamondsuit$

## 6.4 Miary na przestrzeniach euklidesowych

W tym podrozdziale omówimy kilka własności miar na przestrzeniach euklidesowych. Jak sie za chwilę okaże, niektóre własności miary Lebesgue'a przysługują wszystkim takim miarom i jest to raczej zasługa struktury $\sigma$-ciała zbiorów borelowskich niż samej konstrukcji miary. Część tych faktów w istocie wymaga jedynie założenia metryczności przestrzeni i w tej częsci ustalimy przestrzeń metryczną $(X, d)$ — w przypadku, gdy $X = \mathbb{R}^n$ metryka euklidesowa $d$ dana jest wzorem

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k \leqslant n} (x_k - y_k)^2}.$$

Jak poprzednio piszemy $B_r(x)$ aby oznaczyć kulę $B_r(x) = \{y : d(x, y) < r\}$. Zbiór $U$ nazywamy otwartym gdy dla każdego $x \in U$ istnieje $\delta > 0$, taka że $B_\delta(x) \subseteq U$; analogicznie definiujemy zbiory domknięte i $\sigma$-ciało $Bor(X)$.

**Lemat 6.4.1** *W przestrzeni metrycznej $(X, d)$ każdy zbiór domknięty $F$ mozna zapisać w postaci $F = \bigcap_n V_n$, gdzie zbiory $V_n \subseteq X$ sa otwarte. Każdy zbiór otwarty w $X$ jest przeliczalną sumą zbiorów domkniętych.*

*Dowód.* Niech $V_n$ będzie zbiorem tych $x \in X$, dla których istnieje $a \in F$, takie że $d(x,a) < 1/n$. Z własności metryki łatwo sprawdzić, że zbiór $V_n$ jest otwarty. Oczywiście $F \subseteq V_n$ dla każdego $n$. Jeżeli $x \in \bigcap_n V_n$ to dla każdego $n$ istnieje $a_n \in F$, taki że $d(a_n, x) < 1/n$. Oznacza to, że $a_n \to x$ i, z domkniętości $F$, $x \in F$. Drugie stwierdzenie wynika z praw de Morgana. ♢

**Twierdzenie 6.4.2** *Niech $\mu$ będzie skończoną miarą na $\sigma$-ciele $Bor(X)$ w przestrzeni metrycznej $X$. Wtedy dla każdego $B \in Bor(X)$ zachodzą zależności*

$$(*) \quad \mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq B\} = \inf\{\mu(V) : B \subseteq V\},$$

*gdzie $F$ oznacza zawsze zbiór domknięty, a $V$ zbiór otwarty.*

*Dowód.* Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ rodzinę tych $B \in Bor(X)$, dla których spełniony jest warunek (*). Jeżeli zbiór $F$ jest domknięty to $F = \bigcap_n V_n$ dla pewnych zbiorów otwartych, patrz Lemat 6.4.1, przy czym możemy założyć, że $V_n \downarrow F$. Z ciągłości z góry miary skończonej wynika, że $\mu(V_n) \to \mu(F)$. Stąd natychmiast wynika , że $F \in \mathcal{A}$.

Wystarczy teraz wykazać, że $\mathcal{A}$ jest $\sigma$-ciałem, aby upewnić się że $\mathcal{A} = Bor(X)$. Jeżeli $A \in \mathcal{A}$ to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją zbiór otwarty $V$ i domknięty $F$, takie że $F \subseteq A \subseteq V$ i $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$. Wtedy

$$V^c \subseteq A^c \subseteq F^c \quad \text{i} \quad \mu(F^c \setminus V^c) = \mu(V \setminus F) < \varepsilon,$$

co pokazuje, że $A^c \in \mathcal{A}$.

Biorąc $A_n \in \mathcal{A}$ i $A = \bigcup_n A_n$, pokażemy, że $A \in \mathcal{A}$. Dla $\varepsilon > 0$ i każdego $n$ z warunku $A_n \in \mathcal{A}$ istnieją zbiory domkniete $F_n \subseteq A_n$ i otwarte $V_n \supseteq A_n$ o własności $\mu(V_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^n$. Niech $V = \bigcup_n V_n$ i niech $F = \bigcup_{n \leqslant N} F_n$, gdzie liczba $N$ jest tak dobrana, że

$$\mu(\bigcup_n F_n) < \mu(\bigcup_{n \leqslant N} F_n) + \varepsilon;$$

takie $N$ istnieje na mocy ciągłości z dołu miary. Wtedy zbiór $V \supseteq A$ jest otwarty (jako suma zbiorów otwartych), a zbiór $F \subseteq A$ jest domknięty (jako suma skończonej ilości takich zbiorów). Ponadto,

$$\mu(V \setminus F) \leqslant \mu(\bigcup_n V_n \setminus \bigcup_n F_n) + \mu(\bigcup_n F_n \setminus F) \leqslant \sum_n \varepsilon/2^n + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

W ten sposób otrzymujemy $A \in \mathcal{A}$ i dowód został zakończony. ♢

**Twierdzenie 6.4.3 (Łuzina)** *Niech $g$ będzie funkcją borelowską na przestrzeni metrycznej $X$. Wtedy dla dowolnej miary skończonej na $Bor(X)$ i $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $F \subseteq X$, taki że $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ i $g$ jest funkcją ciągłą na zbiorze $F$.*

*Dowód.* Sprawdźmy najpierw, ze twierdzenie zachodzi dla funkcji prostej. Istotnie, jeżeli

$$g = \sum_{i \leqslant n} a_i \cdot \chi_{B_i},$$

gdzie zbiory borelowskie $B_i$ sa parami rozłączne to z Twierdzenia 6.4.1 dla każdego $i \leqslant n$ istnieje zbiór domknięty $F_i \subseteq B_i$, przy czym $\mu(B_i \setminus F_i) < \varepsilon/n$. Wtedy można przyjąć $F = \bigcup_{i \leqslant n} F_i$; funkcja $g$ jest ciągła na tym zbiorze (jako że zbiory $F_i$ są parami rozłączne).

Rozważmy funkcję nieujemną $g$ i $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $X_0 \in Bor(X)$ taki że $\mu(X \setminus X_0) < \varepsilon/2$ i funkcja $g$ jest ograniczona na $X_0$. Istnieje zatem ciąg funkcji prostych $g_n$ zbieżny jednostajnie do $g$ na zbiorze $X_0$, patrz Twierdzenie 2.2.3. Z pierwszej części dowodu możemy dobrać zbiory domknięte $F_n$, takie że

$$\mu(X_0 \setminus F_n) < \varepsilon/2^{n+1}$$

i $g_n$ jest ciągła na $F_n$. Biorąc $F = \bigcap_n F_n$ mamy

$$\mu(X \setminus F) \leqslant \mu(X \setminus X_0) + \mu(X_0 \setminus F) \leqslant \varepsilon/2 + \sum_n \varepsilon/2^{n+1} = \varepsilon.$$

Ponadto na zbiorze $F$ wszystkie funkcje $g_n$ są ciągłe i zbieżne jednostajnie do $g$ — dlatego $g$ jest ciągła na $F$.

Przypadek ogólny funkcji $g : X \to \mathbb{R}$ wynika łatwo przez rozkład $g = g^+ - g^-$. $\diamondsuit$

Miarę $\mu$ zdefiniowaną na $Bor(\mathbb{R}^n)$ nazwiemy *lokalnie skończoną* jeżeli

$$\mu([-k, k]^n) < \infty$$

dla każdego $k$, por. 5.4. Dla miar lokalnie skończonych mamy następujący wniosek z poprzedniego twierdzenia.

**Wniosek 6.4.4** *Niech $\mu$ będzie miarą borelowską lokalnie skończoną na przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ i niech $B \in Bor(\mathbb{R}^n)$ będzie zbiorem miary $\mu$ skończonej.*

*(a) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $F$ i otwarty $V$, takie że $F \subseteq B \subseteq V$ i $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$.*

*(b) Jeżeli funkcja $g : B \to \mathbb{R}$ jest borelowska to dla $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $F \subseteq A$, taki że $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$ i $g$ jest ciągła na $F$.*

*Dowód.* Skoro $\mu(B) < \infty$ to $\mu(B \cap [-k, k]^n)$ jest dla dużych $k$ bliskie $\mu(A)$ i dlatego zagadnienie redukuje się do zbioru ograniczonego $B$; możemy teraz zastosować poprzednie twierdzenie do przestrzeni metrycznej postaci $[-k, k]^n$; przypomnijmy, że podzbiory domknięte i ograniczone w przestrzeniach euklidesowych są zwarte. $\diamondsuit$

**Wniosek 6.4.5** *Niech $\mu$ będzie miarą lokalnie skończoną na $\mathbb{R}^n$ i niech $\mathcal{V}$ będzie rodziną zbiorów otwartych, spełniającą warunki* *(i)* $V_1 \cup V_2 \in \mathcal{V}$ *dla* $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$*;*

*(ii) dla każdego otwartego* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *istnieją* $V_k \in \mathcal{V}$*, takie że* $U = \bigcup_k V_k$*.*
*Wtedy dla każdego* $B \in Bor(\mathbb{R}^n)$ *miary* $\mu$ *skończonej i* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $V \in \mathcal{V}$*, taki że* $\mu(B \triangle V) < \varepsilon$*.*

*Dowód.* Dla $\varepsilon > 0$ dobierzmy zbiór otwarty $U \supseteq B$, taki że $\mu(U \setminus B) < \varepsilon/2$. Z założenia wynika, że istnieje wstępujący ciąg $V_n \in \mathcal{V}$, taki że $U = \bigcup_n V_n$. Wtedy $\mu(V_n) \to \mu(U)$ więc dla dużych $n$ mamy $\mu(U \setminus V_n) < \varepsilon/2$ i

$$\mu(B \triangle V_n) \leqslant \mu(U \setminus V_n) + \mu(U \setminus B) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

♢

## 6.5 Zbiory gęste w $L_1$

W przestrzeni Banacha $E$ z normą $||\cdot||$ zbiór $D \subseteq E$ jest gęsty jeżeli dla każdego $x \in E$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $d \in D$, taki że $||d - x|| < \varepsilon$. Inaczej mówiąc każdy $x \in E$ jest granicą pewnego ciągu $d_n \in D$. Przestrzeń Banacha jest ośrodkowa gdy zawiera zbiór gęsty przeliczalny. Poniżej rozważamy przestrzenie postaci $L_1(\mu)$, ale wyniki naturalnie uogólniają się na przestrzenie $L_p(\mu)$.

**Lemat 6.5.1** *Funkcje proste całkowalne stanowią zbiór gęsty w* $L_1(\mu)$*.*

*Dowód.* Niech $f \in L_1(\mu)$ będzie funkcją nieujemną. Wtedy istnieje ciag funkcji prostych $s_n$ zbieżny monotonicznie i prawie wszędzie do $f$. Otrzymujemy

$$\int_X (f - s_n)\, \mathrm{d}\mu \to 0,$$

więc $||f - s_n||_1 \to 0$. ♢

**Twierdzenie 6.5.2** *W przestrzeni* $L_1(\mu)$ *funkcji całkowalnych względem lokalnie skończonej miary* $\mu$ *na* $n$*-wymiarowej przestrzeni euklidesowej funkcje ciągłe stanowią zbiór gęsty.*

*Dowód.* (1) Niech $g = \chi_V$, gdzie $V$ jest otwartą kostką postaci

$$V = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n).$$

Nietrudno pokazać, że dla każdego $\delta > 0$ istnieje funkcja ciągła $g : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, taka że $g(x) = 1$ dla $x \in V_\delta$ i $g(x) = 0$ dla $x \notin V$, gdzie

$$V_\delta = (a_1 + \delta, b_1 - \delta) \times \ldots \times (a_n + \delta, b_n - \delta).$$

Wtedy $\chi_V - g = 0$ poza zbiorem $V \setminus V_\delta$ i dlatego

$$||\chi_V - g||_1 \leqslant \mu(V \setminus V_\delta) \to 0 \quad \text{dla} \quad \delta \to 0.$$

Zauważmy, że stąd wynika, że funkcje ciągłe aproksymują też $\chi_V$ w przypadku, gdy $V$ jest skończoną sumą otwartych kostek.

(2) Niech $\chi_B \in L_1(\mu)$, czyli $\mu(B) < \infty$. Na mocy Wniosku 6.4.5 dla $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $V$, będący skończoną sumą kostek i taki że $\mu(B \bigtriangleup V) < \varepsilon$. Wtedy

$$||\chi_B - \chi_V|| = \mu(B \bigtriangleup V) < \varepsilon.$$

Dlatego z (1) wynika, że funkcje ciągłe aproksymują funkcję $\chi_B$ w normie $||\cdot||_1$.

(3) Jeżeli $s = \sum_{i\leqslant k} a_i\chi_{A_i}$ jest całkowalną funkcją prostą to z (2) dla każdego $i \leqslant k$ istnieje funkcja ciągła $g_i$, taka że

$$||g_i - \chi_{A_i}||_1 < \varepsilon/(kM),$$

dla danego $\varepsilon > 0$, gdzie $M = \max_{i\leqslant k}(|a_i|+1)$. Wtedy funkcja $g = \sum_{i\leqslant k} a_i g_i$ jest ciągła i

$$||g - s||_1 \leqslant \sum_{i\leqslant k} \int |a_i||\chi_{A_i} - g_i| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon.$$

(4) Ostatecznie, dla funkcji $f \in L_1(\mu)$ tezę otrzymujemy z Lematu 6.5.1 ♢

W istocie można pokazać, że funkcje klasy $C^\infty$ (mające wszystkie pochodne cząstkowe ciągłe) leżą gęsto w $L_1(\mu)$ dla $\mu$ jak w twierdzeniu powyżej — należy tylko sprawdzić tę mocniejszą własność w części (1) dowodu.

**Twierdzenie 6.5.3** *Dla każdej miary lokalnie skończonej $\mu$ na $\mathbb{R}^n$ przestrzeń Banacha $L_1(\mu)$ jest ośrodkowa.*

*Dowód.* Niech $\mathcal{V}$ bedzie rodziną wszystkich skończonych sum kostek otwartych postaci

$$V = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n),$$

gdzie $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Wtedy $\mathcal{V}$ jest rodziną przeliczalną. Z Wniosku 6.4.5 wynika, że jeżeli $\mu(B) < \infty$ to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $V \in \mathcal{V}$, $\mu(V \bigtriangleup B) < \varepsilon$. Dlatego rozumując jak w dowodzie Twierdzenia 6.5.2 mozna sprawdzić, że rodzina funkcji postaci

$$\sum_{i\leqslant k} q_i\chi_{V_i}, \quad \text{gdzie } q_i \in \mathbb{Q}, V_i \in \mathcal{V}$$

stanowi zbiór gęsty w $L_1(\mu)$. ♢

## 6.6 Zadania

**6.6.1** Sprawdzić, że $|a+b|^p \leqslant 2^{p/q}(|a|^p + |b|^p)$, gdzie $1/p + 1/q = 1$; wywnioskować stąd, że $L_p(\mu)$ jest przestrzenią liniową.

**6.6.2** Sprawdzić, że następujące fakty dowodzi się analogicznie jak dla $L_1(\mu)$ $(p \geqslant 1)$

*(i)* $L_p(\mu)$ jest zupełna;

*(ii)* funkcje proste leżą gęsto w $L_p(\mu)$;

*(iii)* $C[0,1]$ leży gęsto w $L_p[0,1]$.

**6.6.3** Ustalić, czy zachodzą jakieś inkluzje pomiędzy $L_p(\mathbb{R})$ dla różnych $p$. A jak jest w przypadku $L_p[0,1]$?

**6.6.4** Ustalić, które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe zawsze, a które w przypadku $\mu(X) < \infty$; $f_n$ jest tutaj ciągiem funkcji mierzalnych.

*(i)* jeśli $f_n$ są całkowalne i zbieżne jednostajnie do $f$ to $f_n$ zbiegają w $L_1$;

*(ii)* jeśli $f_n$ są całkowalne i zbieżne niemal jednostajnie do $f$ to $f_n$ zbiegają w $L_1$;

*(iii)* jeśli $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ i $\sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu < \infty$ to granica jest całkowalna;

*(iv)* jeśli $f_n$ zbiegają w $L_1(\mu)$ to pewien podciąg zbiega prawie wszędzie;

*(v)* jeśli $f_n$ są całkowalne i zbieżne do 0 prawie wszędzie to $f_n$ są jednakowo całkowalne;

*(vi)* jeśli $|f_n| \leqslant g$, gdzie $\int g \, \mathrm{d}\mu < \infty$ to $f_n$ są jednakowo całkowalne;

*(vii)* jeśli $|f_n| \leqslant g$, $\int g \, \mathrm{d}\mu < \infty$, $f_n$ zbiegają prawie wszędzie to $f_n$ zbiegają w $L_1(\mu)$

*(viii)* jeśli $f_n \in L_2(\mu) \cap L_1(\mu)$ i $f_n$ zbiegają w $L_1(\mu)$ to $f_n$ zbiegają w $L_2(\mu)$; na odwrót?

*(ix)* (viii) przy dodatkowym założeniu, że $f_n$ są wspólnie ograniczone.

**6.6.5** Zauważyć, że dla funkcji $f : X \to \mathbb{C}$, $f = f_1 + i \cdot f_2$, jej mierzalność jest równoważna mierzalności części rzeczywistej $f_1$ i urojonej $f_2$. Ponadto, $f$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy $f_1, f_2$ są całkowalne.

**6.6.6** Dla funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ na przestrzeni miarowej $(X, \Sigma, \mu)$ oznaczmy przez $||f||_\infty$ jej istotne supremum, to znaczy

$$||f||_\infty = \inf\{\sup_{X \setminus A} |f| : \mu(A) = 0\}.$$

Wykazać, że $||\cdot||_\infty$ jest normą zupełną na przestrzeni $L_\infty(\mu)$, złożonych z tych funkcji, dla których $||f||_\infty < \infty$, po utożsamieniu funkcji równych prawie wszędzie.

**6.6.7** Wykazać, że dla $f \in L_\infty[0,1]$ zachodzi wzór $\lim_{p \to \infty} ||f||_p = ||f||_\infty$.

**6.6.8** Sprawdzić, że przestrzeń $L_\infty[0,1]$ nie jest ośrodkowa.

**6.6.9** O mierze $\mu$ powiemy że jest ośrodkowa jeśli $L_1(\mu)$ jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Wykazać, że $\mu$ jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy gdy istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{S} \subseteq \Sigma$ że dla każdego $A \in \Sigma$

$$\inf\{\mu(A \triangle S) : \ S \in \mathcal{S}\} = 0.$$

## 6.7 Problemy

**6.7.A** Niech $(X, \Sigma, \mu)$ będzie bezatomową przestrzenią probabilistyczną. Wykazać, że istnieje mierzalna funkcja $f : X \to [0,1]$, taka że $f[\mu] = \lambda$.

Wskazówka: Wystarczy zbudować $g : X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, taką że $g[\mu] = \nu$, gdzie $\nu$ jest miarą Haara na zbiorze Cantora. Wybrać dla każdego $n$ rozłączne zbiory $A_\varepsilon \in \Sigma$, $\varepsilon \in \{0,1\}^n$, tak że $\mu(A_\varepsilon) = 2^{-n}$ i $A_{\varepsilon\frown 0} \cup A_{\varepsilon\frown 1} = A_\varepsilon$.

**6.7.B** Wykazać, że jeśli $(X_1, \Sigma_1, \mu_1)$ i $(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ są dwiema ośrodkowymi bezatomowymi przestrzeniami probabilistycznymi, to odpowiadające im algebry Boole'a $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ są izomorficzne w następującym sensie: istnieje zachowująca działania boolowskie bijekcja $g : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$, która jest izometrią $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ jako przestrzeni metrycznych.

Wskazówka: Wybrać $A_\varepsilon \in \Sigma_1$, takie jak w problemie A oraz takie że rodzina $\mathcal{S}_1$ wszystkich sum skończonych $A_\varepsilon$, $\varepsilon \in \{0,1\}^n$, $n \in \mathbb{N}$ jest gęsta. Analogicznie wybrać taką rodzinę $B_\varepsilon \in \Sigma_2$.

Określić $g([A_\varepsilon]) = [B_\varepsilon]$ i przedłużyć $g$ na $\mathcal{S}_1$ z zachowaniem działań; wtedy $g$ jest izometrią i przedłuża się na domknięcie dziedziny.

**6.7.C** Wykazać, że dla przestrzeni miarowych z poprzedniego problemu $L_p(\mu_1)$ jest liniowo izometryczne z $L_p(\mu_2)$ (gdzie $1 \leqslant p \leqslant \infty$).

Wskazówka: Określić odwzorowanie liniowe $T : L_p(\mu_1) \to L_p(\mu_2)$ najpierw na funkcjach prostych, korzystając z poprzedniego zadania. Wykorzystać fakt, że izometrię można przedłużać na domknięcie dziedziny.

**6.7.D** (dla znających ultrafiltry). Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolnym ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$. Udowodnić, że zbiór $Z \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, gdzie

$$Z = \{\chi_F : \ F \in \mathcal{F}\},$$

jest zbiorem niemierzalnym względem miary Haara.

Wskazówka: Taki zbiór jest zdarzeniem resztowym więc gdyby był mierzalny, to miałby miare 0 bądź 1; rozważyć przesunięcie $Z$ o element 1 (względem działania grupowego).

**6.7.E** Ile jest różnych miar (skończonych, $\sigma$–skończonych, dowolnych) na $\sigma$–ciele $Bor(\mathbb{R})$?