3.5 Zadania

3.5.1 Sprawdzić, że wzór

$$\int_X \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

jednoznacznie definiuje całkę z funkcji prostych całkowalnych na dowolnej przestrzeni (X, Σ, μ).

Wskazówka: Jeżeli $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^k b_j \chi_{B_j}$ to istnieje skończona partycja X na zbiory mierzalne $T_s, 1 \leqslant s \leqslant p$, takie że każdy zbiór A_i i każdy zbiór B_j jest sumą pewnych zbiorów T_s.

3.5.2 Niech $\mu(X) = 1$ i $\mu(A_i) \geqslant 1/2$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wykazać, że istnieje $x \in X$ należący do przynajmniej $n/2$ zbiorów A_i. W tym celu oszacować $\int_X \sum_{i \leqslant n} \chi_{A_i} \, \mathrm{d}\mu$ (por. Problem 1.11.E).

3.5.3 Rozważyć funkcję $f(x) = -\frac{1}{x^2+1}$, aby zauważyć, że nie można w ogólnym przypadku zdefiniować całki $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda$ jako supremum z całek $\int s \, \mathrm{d}\lambda$ po funkcjach prostych $s \leqslant f$. Zdefiniować podobną funkcję na $[0, 1]$.

3.5.4 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową, a $f, g : X \to \mathbb{R}$ funkcjami mierzalnymi. Sprawdzić że

(i) jeśli $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$ dla każdego $A \in \Sigma$, to $f = 0$ prawie wszędzie;

(ii) jeśli f jest całkowalna na X, to jest też całkowalna na każdym $X_0 \in \Sigma$;

(iii) jeśli $A, B \in \Sigma$ i $\mu(A \triangle B) = 0$, to $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_B f \, \mathrm{d}\mu$ dla każdej f (oraz istnienie jednej z całek pociąga istnienie drugiej);

(iv) $\int |f - g| \, \mathrm{d}\mu \geqslant | \int |f| \, \mathrm{d}\mu - \int |g| \, \mathrm{d}\mu|$.

3.5.5 Ustalić, czy

(i) iloczyn dwóch funkcji całkowalnych jest całkowalny;

(ii) funkcja f, gdzie $f = 1$ prawie wszędzie jest całkowalna;

(iii) f jest całkowalna jeśli jest całkowalna na każdym zbiorze miary skończonej.

3.5.6 Rozpatrzmy przestrzeń $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą, to znaczy $\mu(A) = |A|$ dla zbiorów skończnych i $\mu(A) = \infty$ dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ nieskończonego.

Udowodnić, że $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^\infty |f(n)| < \infty$. Zauważyć, że w tym przypadku całka jest sumą szeregu.

3.5.7 Czy istnieje ciąg funkcji całkowalnych, który jest

(i) zbieżny prawie wszędzie, ale nie według miary;

(ii) zbieżny wg miary ale nie prawie wszędzie;

(iii) zbieżny prawie wszędzie, ale nieograniczony;

(iv) zbieżny jednostajnie do zera i taki, że całki nie zbiegają do zera;

(v) jest zbieżny jednostajnie do funkcji niecałkowalnej.

Przy każdym pytaniu rozważyć przypadek $\mu(X) < \infty$ i $\mu(X) = \infty$.

3.5.8 Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ograniczoną funkcją borelowską. Zauważyć, że f jest całkowalna względem miary Lebesgue'a na $[a,b]$.

3.5.9 Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje odcinek $[a,b]$ taki że $\int_{[a,b]} |f| \, \mathrm{d}\mu > \int_{\mathbb{R}} |f| \, \mathrm{d}\mu - \varepsilon$.

3.5.10 Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją dla której istnieje skończona całka niewłaściwa Riemanna $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$. Udowodnić, że f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. Wykazać, że założenie nieujemności funkcji jest istotne.

3.5.11 Niech $\mu(X) < \infty$. Udowodnić, że funkcja mierzalna f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla zbiorów $A_n = \{x : |f(x)| \geqslant n\}$ zachodzi warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$.

3.5.12 Wykazać tzw. nierówność Czebyszewa: dla funkcji całkowalnej f zachodzi

$$\int |f| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon \mu(\{x : \ |f(x)| \geqslant \varepsilon\}).$$

3.5.13 Wywnioskować z nierówności Czebyszewa, że

$$\text{jeżeli} \quad \int |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \to 0 \quad \text{to} \quad f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

3.5.14 Niech A_n będzie ciągiem zbiorów mierzalnych, takim że $\mu(A_n \triangle A_k) \to 0$ gdy $n, k \to \infty$. Wykazać, że istnieje mierzalny zbiór A, taki że $\mu(A \triangle A_n) \to 0$.

3.5.15 Zdefiniować funkcje ciągłe całkowalne $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$, takie że $f_n \to 0$ prawie wszędzie, ale funkcja $\sup_n f_n$ nie jest całkowalna.

3.5.16 Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Sprawdzić, że funkcja $F(x) = \int_{[0,x]} f(t) \, \mathrm{d}\lambda(t)$ jest ciągła. Podać przykłady świadczące o tym, że F nie musi być różniczkowalna.

3.5.17 Zauważyć, że lemat Fatou nie jest prawdziwy bez założenia nieujemności funkcji. Zbadać, przy jakich założeniach o funkcjach zachodzi wzór

$$\limsup_n \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X \limsup_n f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

3.5.18 Niech (f_n) będzie takim ciągiem funkcji całkowalnych, że $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Udowodnić, że szereg $\sum_n f_n$ jest zbieżny prawie wszędzie i

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

3.5.19 Zbadać, czy wzór z poprzedniego zadania zachodzi dla szeregu funkcji $f_n(x) = x^{n-1} - 2x^{2n-1}$ na odcinku $(0,1)$.

3.5.20 Zbadać, czy

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}\, \mathrm{d}x.$$

Jak można uogólnić ten przykład?

3.5.21 Niech μ będzie miarą skończoną na X; $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi, takimi że $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Udowodnić, że jeśli $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i jednostajnie ciągła to

$$\lim_{n\to\infty} \int_X h(f_n)\, \mathrm{d}\mu = \int_X h(f)\, \mathrm{d}\mu.$$

3.5.22 Niech f_n będzie ciągiem funkcji całkowalnych, zbieżnym do całkowalnej funkcji f prawie wszędzie. Udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, \mathrm{d}\lambda \to 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{n\to\infty} \int |f_n|\, \mathrm{d}\lambda = \int |f|\, \mathrm{d}\lambda$.

WSKAZÓWKA: Lemat Fatou.

3.6 Problemy

3.6.A Mówimy, że przestrzeń miarowa (X, Σ, μ) jest *semiskończona* jeżeli

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \Sigma,\ B \subseteq A,\ \mu(B) < \infty\}.$$

Zauważyć, że każda przestrzeń σ-skończona jest semiskończona.

3.6.B Zauważyć że w definicji całki z funkcji nieujemnej na przestrzeni semiskończonej można liczyć supremum po funkcjach prostych całkowalnych. Sprawdzić, że twierdzenia graniczne dla całki zachodzą niezmienionej formie dla przestrzeni semiskończonych.

3.6.C Udowodnić, że każda przestrzeń (X, Σ, μ), która nie jest semiskończona, zawiera nieskończony atom miary, to znaczy zbiór $A \in \Sigma$, taki że $\mu(A) = \infty$ i $\mu(B) \in \{0, \infty\}$ dla każdego zbioru $B \subseteq A$ z σ-ciała Σ.