4.6 Zadania

4.6.1 Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją borelowską. Wykazać, że zbiór pod jej wykresem $\{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ jest borelowskim podzbiorem płaszczyzny.

4.6.2 Niech $f : X \to \mathbb{R}_+$ będzie nieujemną funkcją mierzalną na przestrzeni (X, Σ, μ); niech $P = \{(x,t) : 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ będzie zbiorem pod wykresem funkcji. Sprawdzić, że P należy do σ-ciała $\Sigma \otimes Bor(\mathbb{R})$ oraz wywnioskować z twierdzenia Fubiniego, że

$$\mu \otimes \lambda(P) = \int_X f \, d\mu.$$

4.6.3 Zauważyć, że zbiór borelowski $A \subseteq [0,1]^2$ jest płaskiej miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda(A_x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in [0,1]$.

4.6.4 Zauważyć, że jeśli zbiory borelowskie $A, B \subseteq [0,1]^2$ spełniają zależność $\lambda(A_x) = \lambda(B_x)$ dla wszystkich x to $\lambda_2(A) = \lambda_2(B)$.

4.6.5 Obliczyć miarę Lebesgue'a zbiorów

$$A = \{(x,y) :\ x \in \mathbb{Q} \text{ lub } y \in \mathbb{Q}\}; \qquad B = \{(x,y) :\ x - y \in \mathbb{Q}\}.$$

4.6.6 Wychodząc ze znanego faktu, że izometrie płaszczyzny nie zmieniają pola prostokątów wykazać, że płaska miara Lebesgue'a jest niezmiennicza na izometrie płaszczyzny.

4.6.7 Zauważyć, że płaska miara Lebesgue'a spełnia wzór $\lambda_2(J_r[B]) = r^2\lambda_2(B)$ dla $B \in Bor(\mathbb{R}^2)$, gdzie J_r jest jednokładnością o skali r.

4.6.8 Wyprowadzić z tw. Fubiniego

(i) wzór na objętość stożka o wysokości h, który na podstawie ma zbiór borelowski $B \subseteq \mathbb{R}^2$;

(ii) wzór na objętość kuli o promieniu r w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$.

4.6.9 Zauważyć, że $\lambda \otimes \lambda$ nie jest miarą zupełną na $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}$.

4.6.10 Niech ν będzie miarą liczącą na wszystkich podzbiorach $\mathbb{N}$. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dla której całki iterowane w twierdzeniu Fubiniego dają różne wyniki skończone.

Wskazówka: Określić niezerowe wartości $f(n,n)$ i $f(n+1,n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

4.6.11 Na kwadracie jednostkowym rozważyć funkcje

$$f(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$f(0,0) = g(0,0) = 0$. Zbadać całkowalność, istnienie całek iterowanych, ich równość i odnieść te obserwacje do twierdzenia Fubiniego.

4.6.12 Wykazać, że dla całkowalnej funkcji $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ zachodzi wzór

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, \mathrm{d}\lambda(y)\, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\, \mathrm{d}\lambda(x)\, \mathrm{d}\lambda(y).$$

4.6.13 Niech $\mathcal{A}$ będzie σ–ciałem na $[0,1]$, generowanym przez zbiory przeliczalne. Pokazać, że przekątna $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2 : \ x = y\}$ nie należy do $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

4.6.14 Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest borelowska jeśli $f^{-1}[B] \in Bor(\mathbb{R}^n)$ dla $B \in Bor(\mathbb{R}^k)$. Tutaj $Bor(\mathbb{R}^n)$ oznacza σ-ciało generowane przez otwarte podzbiory $\mathbb{R}^n$. Sprawdzić, że

(i) $Bor(\mathbb{R}^2)$ jest generowane przez otwarte prostokąty $U \times V$;

(ii) $Bor(\mathbb{R}^n)$ jest generowane przez otwarte kostki $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$;

(iii) każda funkcja ciągła $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest borelowska;

(iv) funkcja $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ jest borelowska wtedy i tylko wtedy gdy g_1, g_2 są borelowskie.

4.6.15 Wywnioskować z poprzedniego zadania, że jeśli $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są mierzalne to $g_1 + g_2, g_1 \cdot g_2$ też są mierzalne.

4.6.16 Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem mierzalnym pomiędzy przestrzeniami (X, Σ, μ) i $(Y, \mathcal{A})$, to znaczy $f^{-1}[A] \in \Sigma$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Sprawdzić, że wzór $\nu(A) = \mu(f^{-1}[A])$ definiuje miarę na $\mathcal{A}$. Te miarę nazywamy obrazem μ przez f; oznaczamy $\nu = f[\mu]$.

4.7 Problemy

4.7.A Przy założeniu hipotezy continuum można odcinek $[0,1]$ uporządkować relacją $\prec$ tak, że każdy odcinek początkowy $\{a : a \prec b\}$ w tym porządku jest przeliczalny dla $b \in [0,1]$. Zauważyć, że zbiór

$$Z = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x \prec y\},$$

nie spełnia twierdzenia Fubiniego, a więc nie jest mierzalny na płaszczyźnie.

4.7.B Pokazać, że istnieje na płaszczyźnie zbiór A miary płaskiej zero, taki że A przecina wszystkie prostokąty mierzalne miary dodatniej.

Wskazówka: Uogólnić najpierw tw. Steinhausa do postaci: jeśli A, B są miary dodatniej to $A - B$ zawiera liczbę wymierną.

4.7.C Niech $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ będzie przekątną. Udowodnić, że Δ należy do $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(X)$ wtedy i tylko wtedy gdy $|X| \leqslant \mathfrak{c}$.

4.7.D Niech

$$h : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1], \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}.$$

Sprawdzić, że h jest funkcją ciągłą, a więc mierzalną względem σ–ciała $Bor\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ i $h[\{0,1\}^{\mathbb{N}}] = [0,1]$.

Wykazać, że miara λ na $[0,1]$ jest obrazem miary Haara ν na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ przez tę funkcję.

4.7.E Niech $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem tych x, w których pojawia się, choć raz, ustalony skończony ciąg $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ zer i jedynek. Wykazać, że $\nu(A) = 1$.

4.7.F Udowodnić, że $\nu(x \oplus A) = \nu(A)$ dla każdego borelowskiego zbioru A w zbiorze Cantora $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Wskazówka: Sprawdzić najpierw wzór dla zbiorów C z ciała $\mathcal{C}$ zdefiniowanego w 4.5.

4.7.G Zbiór borelowski $A \subseteq \{0,1\}$ jest nazywany *zdarzeniem resztowym* jeżeli $e \oplus A = A$ dla dowolnego $e \in \{0,1\}$, dla którego $e(n) = 0$ dla prawie wszystkich n. Udowodnić, że $\nu(A) = 0$ lub $\nu(A) = 1$ dla każdego zdarzenia resztowego (jest tzw. prawo 0-1 Kołmogorowa).

Wskazówka: Jeżeli A jest takim zdarzeniem to $\nu(A \cap C) = \nu(A)\nu(C)$ dla każdego $C \in \mathcal{C}$; skorzystać z tego, że wielkość $\nu(A \triangle C)$ może być dowolnie mała.

4.7.H Niech X będzie zbiorem skończonym i niech μ będzie miarą określona na wszystkich podzbiorach $X \times X$, znikającą na przekątnej. Udowodnić, że istnieją rozłączne $A, B \subseteq X$, takie że $\mu(A \times B) \geqslant 1/4$.