Zbiór zadań z kombinatoryki

Światosław R. Gal

wiosna 2017

Oznaczenia

$$[n] := \{1, 2, \ldots, n\},$$
$$\binom{S}{k} := \{X \subset S \mid \#X = k\}.$$

Ponadto (dla $k \in \mathbb{N}$)

$$x^{\underline{k}} := x(x-1)\ldots(x-k+1),$$
$$x^{\overline{k}} := x(x+1)\ldots(x+k-1),$$
$$\binom{x}{k} := \frac{x^{\underline{k}}}{k!},$$
$$x^{\underline{-k}} := \left((x+1)^{\overline{k}}\right)^{-1}.$$

Wobec tego dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\binom{n}{k} = \#\binom{[n]}{k}.$$

0. Zadania na rozgrzewkę

1. Niech $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$. Pokaż, że $(\Delta^n f)(x) = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^{n-k} f(x+k)$.
2. Pokaż, że

   $$\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}}$$

   dla dowolnej liczby całkowitej m.

1. Wzór Stirlinga

Niech

$$P_n = \left\{ (a_i)_{i=1}^{2n} \middle| a_i = \pm 1, \sum_{i=1}^{2n} a_i = 0 \right\}$$

oraz

$$Q_n = \left\{ (a_i)_{i=1}^{2n} \middle| a_i = \pm 1, \sum_{i=1}^{2k} a_i \neq 0 \text{ dla każdego } 0 < k \leq n \right\}.$$

3. Uzasadnij, że $\#\mathrm{P}_n = \binom{2n}{n}$.

4. Pokaż, że $\#\mathrm{P}_n = \#\mathrm{Q}_n$.

   WSKAZÓWKA: Niech $(a_i)_{i=1}^{2n} \in \mathrm{P}_n$. Niech $r = \max\left\{a_1 \sum_{i=1}^{t} a_i | 0 < t < 2n\right\}$. Niech $t = \max\left\{0 < k < 2n | a_1 \sum_{i=1}^{t} a_i = r\right\}$. Zdefiniujmy

$$b_n = \begin{cases} a_1 & \text{if } i = 1. \\ a_{t+2-i} & \text{if } 1 < i \leq t, \\ -a_i & \text{if } i > t. \end{cases}$$

   Pokaż, że przyporządkowanie $\mathrm{P}_n \ni (a_i)_{i=1}^{2n} \mapsto (b_i)_{i=1}^{2n} \in \mathrm{Q}_n$ jest bijekcją. (Napisz funkcję odwrotną.)

5. Pokaż, że $2^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}$.

   WSKAZÓWKA: Pokaż, że dla każdego ciągu $(c_i)_{i=1}^{2n}$ istnieje jedyne takie $0 \leq k \leq n$, że $(c_i)_{i=1}^{2k} \in \mathrm{P}_k$ oraz $(c_{i-2k})_{i=1}^{2(n-k)} \in \mathrm{Q}_{n-k}$.

6. Niech $p_n = \binom{2n}{n}/2^{2n}$ oraz $s_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$. Pokaż, że $s_n = (2n+1)p_n$.

7. Pokaż, że s_n^2/n jest ciągiem rosnącym a $s_n^2/(n+1)$ malejącym.

8. Pokaż, że $s_{n+m}^2 < s_n^2 + s_m^2 < s_{n+m+1}^2$.

9. Wywnioskuj, że $n < \frac{\pi s(n)^2}{4} < n+1$.

   WSKAZÓWKA: Pokratkuj dodatnią ćwiartkę liniami równoległymi do osi rzędnych i odciętych o odciętych i rzędnych odpowiednio równych $s(i)$ dla i naturalnych. Narysuj ćwierć koła o promieniu $s(n)$ i środku w środku układu współrzędnych. Oszacuj pole.

10. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\binom{2n}{n}$.

11. Pokaż, że granica $\lim_{n\to\infty} n! e^n / n^{n+1/2} = \mathrm{C}$ istnieje.

    WSKAZÓWKA: Korzystając z $\log(n) = \int_1^n \frac{dx}{x}$ zapisz $\sum_{k=1}^{n} \log(k) - (n+1/2)\log(n) + n = 1 + \int_{i=1}^{n} \frac{\{x\}-1/2}{x}\,dx$.

12. Oblicz C korzystając z zadania 11.

2. O symbolu dwumianowym

13. Zsumuj

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{x+k}{i},$$

    gdzie i, oraz m są liczbami naturalnymi.

    Czy możesz nie zakładać, że x jest liczbą całkowitą?

14. Czy umiesz podać interpretację kombinatoryczną, gdy x jest liczbą całkowita?

WSKAZÓWKA: Niech

$$\begin{aligned} V &= \binom{[n+m+1]}{i+1}, \\ V_\bullet &= \binom{[n+1]}{i+1}, \\ V_k &= \left\{ S \in \binom{[n+m+1]}{i+1} \,\middle|\, \max S = n+k+1 \right\}. \end{aligned}$$

Pokaż, że $V = V_\bullet \cup \bigcup V_k$. Oblicz $\#V_k$.

15. Ze zbioru $[n]$ wybrano (po kolei) trzy elementy. Wiadomo, że otrzymano k różnych elementów. Niech a_k oznacza liczbę sposobów na które możne to zrobić. Policz a_k dla $k = 1, 2, 3$. Innymi słowy oblicz

$$a_k = \#\left\{ (x_1, x_2, x_3) \middle| x_i \in [n], \#\{x_1, x_2, x_3\} = k \right\}.$$

16. Zapisz n^2 jako $a_2\binom{n}{2} + a_1\binom{n}{1} + a_0\binom{n}{0}$. Wykorzystaj to do policzenia $\sum_{n=0}^{N} n^2$. Wylicz $\sum_{n=0}^{N} n^3$.
17. dlaczego liczby a_k z poprzednich dwu zadań są równe.
18. Oblicz
(a) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$,
(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{l-k}$,
(c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{a}\binom{n-k}{b}$,
(d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. WSKAZÓWKA (d): $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
19. Podaj kombinatoryczną interpretację wzorów z poprzedniego zadania.

WSKAZÓWKA (c): Niech

$$\begin{aligned} V &= \binom{[n]}{a+b+1}, \\ V_k &= \left\{ S \in \binom{[n]}{a+b+1} \,\middle|\, k+1 \in S, \quad \#(S \cap [k]) = a \right\}. \end{aligned}$$

Zauważ, że $V = \bigcup V_k$.

20. Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij wzór dwumianowy

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{n-i}}.$$

WSKAZÓWKA 1: Indukcja.

WSKAZÓWKA 2: Użyj zadania 19(b).

21. Niech $c_k(n)$ oznacza liczbę rozkładów liczby n w sumę k całkowitych nieujemnych składników. Tj.
$$c_k(n) = \#\left\{(n_1,\dots,n_k)\,\middle|\,\sum n_i = n\right\}.$$
Pokaż, że
$$\sum_{n\geq 0} c_k(n)x^n = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)^k.$$
22. Pokaż, że $c_{k+1}(n) = \binom{n+k}{k}$.
23. Niech n oraz k będą liczbami naturalnymi. Wyraź $\binom{-n}{k}$ przy pomocy wyrazu dwumianowego z naturalnymi współczynnikami.
24. Zsumuj
$$G_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n.$$
Oblicz promień zbieżności.
WSKAZÓWKA 1: Skorzystaj z zadań 22. i 23.
WSKAZÓWKA 2: Skorzystaj z zadania 24.
WSKAZÓWKA 3:
$$\sum\binom{n+k}{k}x^k = \sum\frac{(n+k)^{\underline{k}}x^k}{k!} = \sum\frac{(x^{n+k})^{(k)}}{k!} = \frac{1}{k!}\left(\sum x^{n+k}\right)^{(k)}.$$
WSKAZÓWKA 4: Pokaż, że $G_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x}G_k(x)$.
WSKAZÓWKA 4a:
$$G_{k+1}(x) = \sum\binom{n}{k+1}x^n + \sum\binom{n-1}{k}x^n = xG_{k+1}(x) + xG_k(x).$$
WSKAZÓWKA 4b:
$$G_{k+1}(x) = x\sum\binom{n+1}{k+1}x^n = x\sum_n\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}x^i x^{n-1} = x\left(\sum_i x^i\right)\left(\sum_m\binom{m}{k}x^m\right).$$
25. Użyj poprzedniego zadania do udowodnienia
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{a}\binom{n-k}{b} = \binom{n+1}{a+b+1}.$$
WSKAZÓWKA: Pomnóż obie strony przez t^{n+1} i wysumuj po $n \geq 0$.
26. Udowodnij, że jeśli k jest liczbą naturalną, to
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\overline{k}}}{n^k} = 1.$$

3. O liczbach Catalana

27. Sprawdź, że

$$x^{\underline{k}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\underline{k}} = \frac{(2x)^{\underline{2k}}}{2^{2k}}$$

28. Wywnioskuj z powyższego zadania, że

$$\binom{x}{k}\binom{x-\frac{1}{2}}{k} = \binom{2x}{2k}\binom{2k}{k}\Big/2^{2k}.$$

29. Wywnioskuj, lub udowodnij inaczej, że

$$\binom{-1/2}{k} = \left(\frac{-1}{4}\right)^{k}\binom{2k}{k}.$$

30. Oblicz

$$\mathrm{D}(x) := \sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}x^k.$$

Zastanów się dla jakich x ta suma jest zbieżna.

Wskazówka 1: Poprzednie zadanie.

Wskazówka 2: Użyj zadania 6 do obliczenia $\mathrm{D}(x)^2$.

31. Oblicz

$$\mathrm{C}(\mathrm{X}) := \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}x^k.$$

Zastanów się dla jakich x ta suma jest zbieżna.

Wskazówka 1:

$$\frac{d}{dx}(x\mathrm{C}(\mathrm{X})) = \mathrm{D}(\mathrm{X}).$$

Wskazówka 2:

$$\mathrm{D}(\mathrm{X}) = 1 + x\sum\binom{2k+2}{k+1}x^k = 1+2x\sum\left(2-\frac{1}{k+1}\right)\binom{2k}{k}x^k = 1+2x(2\mathrm{D}(x)-\mathrm{C}(x)).$$

32. Udowodnij, że

$$x(1-4x)\mathrm{C}'(x) + (1-2x)\mathrm{C}(x) = 1.$$

Wskazówka 1: Skorzystaj ze wskazówek do poprzedniego zadania.

Wskazówka 2: Zauważ, że dla $\mathrm{C}_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ zachodzi

$$(n+2)\mathrm{C}_{n+1} = 2(2n+1)\mathrm{C}_n.$$

33. Pokaż, że następujące liczby (oznaczane C_k i nazywane liczbami Catalana) są równe (w razie problemów z interpretacją załóżmy, że $C_0 = C_1 = 1$):

(a) Liczba połączeń w pary wierzchołków wypukłego $2k$-kąta, tak by odpowiadające mu przekątne (lub boki) się nie przecinały,

(b) liczba podziałów $(k+2)$-kąta wypukłego przekątnymi na trójkąty,

(c) Liczba spacerów po siatce kwadratowej z punktu $(0,0)$ do (k,k) pozostających pod przekątną i takich, że w każdym kroku można zwiększyć dowolną współrzędną o jeden,

(d) liczba ustawień nawiasów (kolejności działań) w produkcie $k+1$ liter.

(e) Liczba niemalejących ciągów od wyrazach dodatnich długości k ograniczonych przez ciąg tożsamościowy.

(f) Liczba ustawień monet w stos tak, ze w najniższym poziomie znajduje się k monet ułożonych jedna obok drugiej w linii, a każda moneta w następnej warstwie musi się opierać na dwu połówkach monet leżących poniżej.

(g) liczbę (nieuporządkowanych) par spacerów (γ_1, γ_2) na płaszczyźnie o tej własności, że każdy spacer wykonuje kroki zwiększające jedną ze współrzędnych o jeden. Spacery zaczynają się w punkcie $(0,0)$, mają długość $k+1$ i mają wspólne tylko (oba) końce.

(h) jak w punkcie poprzednim rozważyć spacery długości $k-1$, które mogą się spotykać po drodze, ale nie mogą się "krzyżować".

34. Znajdź inne kombinatoryczne interpretacje liczb Catalana.

35. Pokaż, że

$$C_{n+1} = \sum_k \binom{n}{2k} C_k\, 2^{n-2k}.$$

Wskazówka: Punkt (h).

36. Pokaż, że $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$.

37. Pomnóż powyższa równość przez x^{n+1} i wysumuj po n. Niech $C(x) = \sum_{n\geq 0} C_n x^n$. Napisz równanie, które spełnia $C(x)$.

38. Oblicz $C(x)$. Rozwiń $C(x)$ w szereg. Podaj wzór na C_k przy użyciu symbolu dwumianowego.

39. Pokaż, że $C_k = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.

40. Znajdź kombinatoryczny dowód powyższej formuły.

4. O liczbach Fibonacciego

41. Pokaż, że $F_{n+1}F_k + F_n F_{k-1} = F_{n+k}$.

42. Pokaż, że $(F_k, F_l) = F_{(k,l)}$.

43. Udowodnij, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

WSKAZÓWKA: Rozpatrz ciąg $\{F_p\}$ gdzie p przebiega liczby pierwsze. Skorzystaj z tego, że $F_{19} = 4181 = 37.113$. Uprość rozumowanie korzystając z tego, że $F_8 = 21 = 3.7$.

44. Oblicz F_{-n} przy pomocy liczb Fibonacciego z dodatnimi indeksami.

5. O rekursjach

45. Rozwiąż rekursję $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$.

WSKAZÓWKA: Niech $v_n = \binom{a_n}{(-1)^n} \in \mathbb{R}^2$. Znajdź macierz A taką, że $Av_n = v_{n+1}$. Policz $A^n v_0$.

46. Rozwiąż rekursję $a_{n+1} = 3a_n + n$.

WSKAZÓWKA: Przemnóż równość przez t^{n+1} i wysumuj, żeby otrzymać

$$(1+3t)\sum a_n t^n = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2.$$

Rozłóż

$$\frac{t^2}{(1+3t)(1-t)^2} = \frac{A}{1+3t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1-t}$$

w ułamki proste.

47. Rozwiąż rekursję $a_{n+1} = 4a_n + \binom{n}{2}$.

48. Rozwiąż rekursje $a_{n+1} = 5a_n + 2^n$.

49. Niech $a_{n+1} = na_n + 2$ oraz $A(t) = \sum_n a_n t^t$. Znajdź równanie różniczkowe, które spełnia funkcja A.

50. Rozwiąż rekursję $s_0 = 0$, $s_{n+1} = s_n + n^2$ mnożąc przez x^{n+1} i sumując po $n \geq 0$.

WSKAZÓWKA: Rozłóż n^2 tak jak w zadaniu 17. oraz użyj zadania 25.

51. Rozwiąż rekursję:

$$g_0 = 1,$$
$$g_{n+1} = g_n + g_{n-1} + g_{n-2} + \ldots + g_0.$$

52. Rozwiąż rekursję

(a) $a_{n+1} = 5a_n + 3$,

(b) $a_{n+1} = -a_n + 7$,

(c) $a_{n+1} = 4a_n - 11$,

(d) $a_{n+1} = a_n + 3$.

53. Rozwiąż rekursję $c_{n+2} = 5c_{n+1} - 6c_n$ dla

(a) $c_0 = 1$, $c_1 = 4$;

(b) $c_0 = 2$, $c_2 = 13$;

(c) $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.

54. Rozwiąż rekursję $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$.

55. Rozwiąż rekursję $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ dla

(a) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;

(b) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;

(c) $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

56. Rozwiąż rekursję

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + (-1)^n,$$

$g_0 = g_1 = 1$.

57. (Zadanie Jasia Dymary) W pierwszym roku zimnej wojny Amerykanie mają 2 rakiety, a Rosjanie 14. Co roku Amerykanie produkują tyle rakiet, ile Rosjanie mieli rok wcześniej (tak więc np. w drugim roku będą mieli 2 stare +14 nowych = 16 rakiet). Rosjanie za to pilnują, aby zawsze mieć dwa razy tyle ile Amerykanie mieli rok wcześniej (czasem wymagać to może częściowej demilitaryzacji — mówi się wtedy o oszczędnościach w zbrojeniówce; np. w drugim roku Rosjanie będą mieć 2.2 = 4 rakiety, ale za to w trzecim 2.16 = 32 rakiety). Znajdź wzór opisujący liczbą amerykańskich rakiet w n-tym roku zimnej wojny.

Wskazówka 1: Niech R_n i A_N oznaczają liczbę rakiet rosyjskich i amerykańskich w n-tym roku. "Wyeliminuj Rosjan" wstawiając $R_{n+1} = 2A_n$ do $A_{n+2} = A_{n+1} + R_{n+1}$.

Wskazówka 2: Niech $V_n := A_n - R_n$ oraz $W_n := 2A_n + R_n$. Jak wyrażają się V_{n+1} i W_{n+1} przez V_n i W_n?

58. Zdiagonalizuj macierz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Jaki to ma związek z zadaniem poprzednim?

6. O liczbach Catalana raz jeszcze

59. Niech $A(t) = B(t^2)e^{2t}$. Pokaż, że

$$tA''(t) + (3-4t)A'(t) - 6A(t) = 4te^{2t}\left(t^2B''(t^2) + 2B'(t^2) - B(t^2)\right).$$

60. Niech $A(t) = \sum_n \frac{a_n t^n}{n!}$. Załóżmy, że $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+\alpha}{\beta n+\gamma}$. Pokaż, że

$$tA''(t) + (\alpha - \beta t)A'(t) - \gamma A(t) = 0.$$

61. Niech

$$G(t) = \sum_n \frac{(2n+2)!t^n}{n!(n+1)!(n+2)!},$$
$$F(t) = \sum_k \frac{t^k}{k!(k+1)!}.$$

Sprawdź, że

$$tG''(t) + (3-4t)G'(t) - 6G(t) = 0,$$
$$tF''(t) + 2F'(t) - F(t) = 0.$$

62. Pokaż, że

$$G(t) = F(t^2)e^{2t}.$$

63. Wywnioskuj, że

$$C_{n+1} = \sum_k \binom{n}{2k} C_k\, 2^{n-2k}.$$

64. Znajdź prostszy dowód formuły z poprzedniego zadania.

7. O liczbach i wielomianach Beurnulliego

65. Pokaż, że $\zeta(k) = \sum_{n>0} n^{-k}$ jest skończona dla $k > 1$.
66. Przeczytaj rozdział 7.6 z [GKP].

67. Korzystając z dowolnej definicji liczb Bernoulliego pokaż, że $B_{2k+1} = 0$ dla $k > 0$.
68. Niech p_n będzie ciągiem wielomianów takich, że $p_0 = 1$ oraz $p'_{n+1} = -p_n$. (Np. $p_n(t) = (b-t)^n/n!$ lub $p_n(t) = (-1)^n B_n(t)/n!$). Pokaż, że

$$\int_a^b p_n(t) f^{(n)}(t)\, dt = \sum_{i=k+1}^{n} p_i(t) f^{(i-1)}(t)\Big|_{t=a}^{b} + \int_a^b p_k(t) f^{(k)}(t)\, dt.$$

69. Wstaw do powyższej formuły $p_n = (b-t)^n/n!$ (oraz $k = -1$). Zinterpretuj.
70. Sprawdź, że

$$\int_0^1 B_1(t) f'(t) = \int_0^1 f + B_1(t) f(t)\Big|_{t=0}^{1} - f(0).$$

71. Przemyśl kroki w następującym rachunku

$$\begin{aligned}
(-1)^N \int_a^{a+1} \frac{B_N(t)}{k!} f^{(N)}(t)\, dt &= \sum_{i=2}^{N} \frac{(-1)^i B_i(t)}{i!} f^{(i-1)}(t)\Big|_{t=0}^{1} + \int_a^b B_1(t) f^{(k)}(t)\, dt \\
&= \sum_{i=2}^{N} \frac{B_i(t)}{i!} f^{(i-1)}(t)\Big|_{t=0}^{1} + B_1(x) f(x)\Big|_{t=0}^{1} + \int_0^1 f - f(0) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i(t)}{i!} f^{(i-1)}(t)\Big|_{t=0}^{1} - f(0).
\end{aligned}$$

72. Wywnioskuj, że jeśli a i b są liczbami całkowitymi to zachodzi *wzór sumacyjny Eulera*

$$\sum_{i=a}^{b-1} f(i) = \int_a^b f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{N} \frac{B_k}{k!} f^{k-1}(t)\Big|_{t=a}^{b} - \int_a^b \frac{B_N(\{t\})}{k!} f^{(N)}(t)\, dt,$$

gdzie $\{\cdot\}$ oznacza część ułamkową.

73. Policz
$$\frac{d}{dt}\left(t(log(t)-1)\right)$$

74. Napisz wzór sumacyjny Eulera do "drugiego miejsca po przecinku" (N = 6) dla $f(x)=\log(x)$.

75. Znajdź asymptotykę $n!$.

8. O liczbach Stirlinga i wielomianach Bella

76. Niech $\left\{ {n \atop k} \right\}$ oznacza liczbę podziałów zbioru n elementowego na k niepustych podzbiorów. Pokaż, że
$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}.$$

77. Niech $\varpi_n(t)=\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} t^k$. Pokaż, że
$$\varpi_{n+1}(t) = t\left(\varpi_n'(t)+\varpi_n(t)\right).$$

78. Pokaż, że
$$e^t\varpi_n(t) = \sum \frac{k^n t^k}{k!}.$$

79. Niech P_t będzie rozkładem Poissona z parametrem t. Pokaż, że n-ty moment rozkładu P_t jest równy
$$m_n(P_t) = \varpi_n(t).$$

80. Pokaż, że
$$\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \sum \binom{n}{j}\left\{ {j \atop k} \right\}.$$

81. Pokaż, że $\varpi_{n+1}(t)=t\sum_j \binom{n}{j}\varpi_k(t)$.

82. Oblicz
$$\sum_k \frac{\varpi_k(1)\lambda^k}{k!}.$$

83. Wywnioskuj, że
$$\sum_{n,k\geq 0}\left\{ {n \atop k} \right\} t^k\frac{\lambda^n}{n!} = \sum n\varpi_n(t)\frac{\lambda^n}{n!} = e^{t(e^\lambda-1)}.$$

WSKAZÓWKA 1: Skorzystaj z zadania 78.

Wskazówka 2: Niech $A(t,\lambda) = \sum_{n\geq 0} \varpi_n(t)\frac{\lambda^n}{n!}$. Pokaż, że

$$t\left(A(t,\lambda) + \frac{\partial}{\partial t}A(t,\lambda)\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}A(t,\lambda),$$
$$A(0,\lambda) = 1.$$

Pokaż, że $e^{t(e^\lambda - 1)}$ spełnia to samo cząstkowe równanie różniczkowe.

Wskazówka 3: Skorzystaj z zadania 82. Niech $A(t,\lambda) = \sum_{n\geq 0} \varpi_n(t)\frac{\lambda^n}{n!}$. Pokaż, że

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}A(t,\lambda) = te^\lambda A(t,\lambda),$$
$$A(0,\lambda) = 1.$$

Pokaż, że $e^{t(e^\lambda - 1)}$ spełnia to samo cząstkowe równanie różniczkowe.

Wskazówka 4: Skorzystaj z zadania 80:

$$\sum_n m_n(P_t)\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n,k} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\frac{k^n\lambda^n}{n!} = \sum_k e^{-t}\frac{(te^\lambda)^k}{k!}.$$

9. O permutacjach i rozkładzie Poissona

84. Niech s_k oznacza liczbę permutacji zbioru k-elementowego. Przypomnij, że $s_k = k!$.
85. Niech a_k oznacza liczbę permutacji zbioru k-elementowego, które nie mają punktów stałych. Ile wynosi a_0?
86. Oblicz
$$\sum_{k\geq 0}\frac{a_k}{s_k}t^k.$$
87. Pokaż, że $a_n = na_{n-1} + (-1)^n$.
88. Pokaż, że $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$.
89. Rozpatrz zmienną losową X_f na *przestrzeni probabilistycznej* S_f z miarą równomiernie rozłożoną zadaną wzorem
$$X_f(\sigma) = \#\{1 \leq i \leq f \mid \sigma_i = i\}$$
(liczba punktów stałych). Oblicz kilka pierwszym momentów X_f. Oblicz wariancję X_f.
90. Załóżmy, że $f \geq n$. Pokaż, że n-ty moment X_f jest równy f-temu momentowi rozkładu Poissona z parametrem 1.
91. Niech σ będzie permutacją. Przez $c_i(\sigma)$ oznaczmy liczbę cykli dlugości i w σ. Niech będzie dany ciąg liczb naturalnych $\{k_i\}_{i\geq 1}$. Oblicz liczbę elementów w grupie S_f permutacji f obiektów takich, że dla każdego i zachodzi $c_i(\sigma) = k_i$.

92. Niech x_j dla $j \geq 1$ będą zmiennymi. Oblicz

$$\sum_f \frac{1}{f!} \sum_{\sigma \in S_f} \prod_i x_i^{c_i(\sigma)}.$$

93. Niech $X_{f,i}$ oznacza zmienną losową mówiąca ile cykli długości i ma losowy element grupy S_f. Do jakiego rozkładu zbiega $X_{f,i}$ gdy f dąży do nieskończoności?

94. Niech B_p oznacza zmienną przyjmującą wartość 1 z prawdopodobieństwem 1 i 0 z prawdopodobieństwem $(1-p)$. Niech $Y_n = \sum_{k=1}^{n} B_{1/n}$, gdzie sumowane zmienne są niezależne. Niech X_n będzie liczbą cykli w rozkładzie losowej permutacji zbioru n-elementowego. Pokaż, że X_n oraz Y_n mają ten sam rozkład.

Literatura

[GKP] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, *Matematyka konkretna*, z języka angielskiego przełożyli P. Chrząstowski, A. Czumaj, L. Gąsieniec and M. Raczunas. Wydawnictwo Naukowe PAN, Warszawa, 1998. 719 pp. ISBN: 83-01-12124-6 68-01.