Rekurencje liniowe

Ciąg Fibonacciego był zadany jako

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \qquad F(1) = 1 = F(2)$$

[Czasami przyjmuje się $F(0)=0$, $F(1)=1$
jeśli liczymy od 0]

Jest to przykład jednorodnej rekurencji liniowej rzędu 2.
Ogólniej taka rekurencja rzędu k to równanie

$$(*) \quad x(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \ldots + a_k x(n-k)$$

dla $n \geq k$, przy czym $x(0), \ldots, x(k-1)$ są zadane.

Liniowość: wyrazy a_i są stałe

Jednorodność: po prawej stronie nie ma wyrazu wolnego

Poniżej opisujemy metodę znajdowania jawnego wzoru na $x(n)$.

Krok I szukamy rozwiązań postaci $x(n) = q^n$
gdzie $q \neq 0$

Wstawiamy do (*) i otrzymujemy

$$q^n = a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \ldots + a_k q^{n-k}$$

Dzieląc przez q^{n-k} widzimy, że q musi spełniać

$$(**) \quad W(q) = q^k - a_1 q^{k-1} - \ldots - a_k = 0$$

Ten wielomian po lewej stronie zmiennej q nosi nazwę wielomianu charakterystycznego

Twierdzenie

Jeżeli wielomian charakterystyczny ma k różnych pierwiastków $q_1, \dots, q_k$ to każde rozwiązanie rekurencji $(*)$ jest postaci

$(***)$ $x(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots + c_k q_k^n$

dla pewnych stałych

Dowód. Zauważmy, że każde rozwiązanie $x(n)$ jest jednoznacznie wyznaczone przez początkowe wyrazy $x(0), \dots, x(k-1)$

Ponadto zbiór rozwiązań jest przestrzenią liniową: jeśli $x(n)$ i $y(n)$ spełniają $(*)$ to ich kombinacje liniowe $a\,x(n) + b\,y(n)$ też spełnia $(*)$. Tutaj istotne jest, że w $(*)$ nie ma wyrazu wolnego!

Zbiór rozwiązań jest więc k-wymiarową przestrzenią liniową

Niech $x(n)$ będzie dowolnym rozwiązaniem $(*)$

Oznaczmy $x(0) = b_0$, $x(1) = b_1, \dots, x(k-1) = b_{k-1}$

Chcemy dobrać stałe $c_1, \dots, c_k$ tak aby zachodziła $(**)$. Podstawiając $n = 0, 1, \dots, k-1$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dots + c_k = b_0 \\ c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots + c_k q_k = b_1 \\ \dots \\ c_1 q_1^{k-1} + c_2 q_2^{k-1} + \dots + c_k q_k^{k-1} = b_{k-1} \end{cases}$$

Ten układ, względem niewiadomych c_i ma zawsze rozwiązanie, patrz poniżej!

3

Zauważmy, że aby uzasadnić ostatnie stwierdzenie z dowodu musimy pokazać że wyznacznik

$$V(q_1,\dots,q_k)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1^2 & q_2^2 & & q_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & & q_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

jest niezerowy.

<u>Lemat</u> Wyznacznik $V(q_1,\dots,q_k)$, zwany wyznacznikiem Vandermonde'a spełnia

$$V(q_1,\dots,q_k)=\prod_{i<j}(q_i-q_j)$$

(więc faktycznie jest niezerowy dla parami różnych q_i).

<u>Dowód</u> ~~Zamieniając~~ "Uzmienniając" ostatnią kolumnę otrzymujemy

$$w(x)=V(q_1,\dots,q_{k-1},x)$$

gdzie $w(x)$ jest pewnym wielomianem zmiennej x

Zauważmy że $w(q_1)=0$: wyznacznik znika bo ma dwie te same kolumny.

W ten sposób sprawdzamy, że

$$w(q_1)=w(q_2)=\dots=w(q_{k-1})=0$$

Wynika stąd (!) że $w(x)$ jest postaci

$$w(x)=A(x-q_1)(x-q_2)\dots(x-q_{k-1})$$

W szczególności:

$$w(0)=A\,q_1\dots q_{k-1}\,(-1)^{k-1}$$

RSJ

z drugiej strony

$$W(0) = (-1)^{k-1} q_1 \cdots q_{k-1} \, V(q_1, \ldots, q_{k-1})$$

Taki wzór otrzymujemy ze wzoru Lagrange'a, rozwijając wzdłuż ostatniej kolumny

stąd $A = V(q_1, \ldots, q_{k-1})$ i

$$V(q_1, \ldots, q_k) = W(q_k) = V(q_1, \ldots, q_{k-1}) \prod_{i<k} (q_k - q_i)$$

Teraz prosta indukcja i koniec !

Proszę poćwiczyć metodę na przykładach.

Jakie problemy możemy napotkać?

- nie potrafimy znaleźć pierwiastków wielomianu charakterystycznego — na to nie ma rady :-(
- wielomian nie ma rzeczywistych pierwiastków — nie szkodzi.

Przykład. Rekurencja $x(n) = -x(n-2)$

Podstawiamy $x(n) = q^n$:

$$q^n = -q^{n-2} \quad \text{czyli}$$

$$q^2 + 1 = 0$$

No ale są liczby zespolone ! Mamy rozwiązanie

$$q_1 = i \qquad q_2 = -i \qquad [\, i^2 = -1 \,]$$

Ogólna postać rozwiązania:

$$x(n) = c_1 i^n + c_2 (-i)^n$$

Jeśli, na przykład, $x(0) = x(1) = 1$ to dobieramy stałe c_1, c_2 rozwiązując

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 i - c_2 i = 1 \end{cases}$$

RSJ

Zupełnie inny problem powstaje, gdy wielomian charakterystyczny ma pierwiastki wielokrotne

<u>Przykład.</u> $x(n) = -2x(n-1) - x(n-2)$

Wstawiamy $x(n) = q^n$ i q musi spełniać

$$q^n = -2q^{n-1} - q^{n-2}$$

$$q^2 + 2q + 1 = 0$$

$$(q+1)^2 = 0.$$

Jest jedno rozwiązanie $x(n) = (-1)^n$ ale z niego nie zbudujemy, na przykład, ~~cię~~ rozwiązania takiego że $x(0) = x(1) = 1$

Trzeba „zgadnąć", że tutaj

$$x(n) = n(-1)^n$$

też jest rozwiązaniem. Teraz ogólne rozwiązanie jest postaci

$$x(n) = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n$$

Wstawiając $n = 0, 1$:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$ ■

To nie był przypadek: jeżeli q_1 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego to

$$q_1^n \quad \text{oraz} \quad n \cdot q_1^n$$

rozwiązują daną rekurencję. Udowodnimy to później.

Ogólny przypadek wyjaśnimy na przykładzie.

Przykład. Załóżmy, że rekurencja rzędu 6 ma wielomian charakterystyczny postaci

$$(q-2)(q-3)^2(q-5)^3$$

Oznacza to, że

— $q_1 = 2$ jest pierwiastkiem jednokrotnym
— $q_2 = 3$ jest —||— dwukrotnym
— $q_3 = 5$ jest —||— trzykrotnym

Przestrzeń rozwiązań jest wymiaru 6 i potrzebujemy 6 niezależnych rozwiązań. Są to

$$q_1^n,\ q_2^n,\ n q_2^n,\ q_3^n,\ n q_3^n,\ n^2 q_3^n$$

~~Dowód w następnym odcinku.~~
~~że to zawsze~~

Udowodnimy później, że taka metoda działa w ogólnym przypadku.