1. Jednorodne rekurencje liniowe - dokończenie

Na początek pewien prosty lemat o pochodnej wielomianu.

Lemat 1.1. *Jeżeli t_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $w(t)$ to $w^{(j)}(t_0) = 0$ dla $j < k$.*

Dowód. Skoro t_0 jest k-krotnym pierwiastkiem to wielomian jest postaci

$$w(t) = (t - t_0)^k w_1(t).$$

Wtedy, różniczkując,

$$w'(t) = k(t - t_0)^{k-1} w_1(t) + (t - t_0)^k w_1'(t),$$

a zatem t_0 jest $(k - 1)$-krotnym pierwiastkiem pochodnej wielomianu. Teza wynika więc z prostej indukcji. □

Wróćmy do równania rekurencyjnego

$$x(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \ldots + a_k x(n-k), \tag{1.1}$$

i wielomianu charakterystycznego tej rekurencji

$$w(t) = t^k - a_1 t^{k-1} - \ldots - t a_{k-1} - a_k. \tag{1.2}$$

Twierdzenie 1.2. *Jeżeli wielomian 1.2 ma m-krotny pierwiastek q_0 to ciągi $x(n) = n^j q_0^n$ są rozwiązaniami rekurencji 1.1 dla $j < m$.*

Dowód. (Szkic) Rozważmy przypadek $j = 1$. Wiemy, że q_0 spełnia równanie

$$t^n = a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \ldots + a_k t^{n-l}. \tag{1.3}$$

Ponieważ $w'(q_0) = 0$ to q_0 spełnia też 1.3 po zróżniczkowaniu czyli

$$n q_0^{n-1} = a_1 (n-1) q_0^{n-2} + a_2 (n-2) q_0^{n-3} + \ldots + a_k (n-k) q_0^{n-k-1}. \tag{1.4}$$

Po pomnożeniu przez q_0, otrzymujemy

$$n q_0^n = a_1 (n-1) q_0^{n-1} + a_2 (n-2) q_0^{n-2} + \ldots + a_k (n-k) q_0^{n-k}, \tag{1.5}$$

co mieliśmy wykazać. Zadanie dla czytelnika: Rozważyć przypadek $j = 2$ i spróbować zapisać przypadek ogólny. □

Wniosek 1.3. *Jeżeli wielomian charakterystyczny 1.2 równiania rekurencyjnego 1.1 jest postaci*

$$w(t) = a(t - q_1)^{m_1} (t - q_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (t - q_s)^{m_s},$$

to ciągi $x(n) = n^j q_i^n$ dla $1 \leqslant i \leqslant s$, $0 \leqslant j \leqslant m_i - 1$ rozwiązują tę rekurencję.

W Lemacie oczywiście $m_1+m_2+\ldots+m_s = k$ ponieważ $w(t)$ jest wielomianem stopnia k. Wynika stąd, że Wniosek wylicza k różnych rozwiązań rekurencji (tyle, ile trzeba). Można wykazać, (dowód pomijamy; wymaga on policzenia pewnego wyznacznika typu Vandermonde'a), że te rozwiązania są istotnie liniowo niezależne, czyli że każde rozwiązanie rekurencji jest ich kombinacją liniową.

Przykład 1.4. Załóżmy, że dana jest rekurencja o wielomanie charakterystycznym $w(t) = (t-2)(t-3)^2(t-5)^3$. Zgodnie z twierdzeniem mamy bazę 6 rozwiązań

$$x_1(n) = 2^n, x_2 = 3^n, x_3(n) = n3^n, x_4(n) = 5^n, x_4(n) = n \cdot 5^n, x_4(n) = n^2 \cdot 5^n.$$

Jeśli więc szukamy rozwiązania spełniającego $x(0) = x(1) = \ldots = x(5) = 1$, to wiemy, że jest ono postaci $x(n) = c_1x_1(n) + \ldots + c_6x_6(n)$ i, aby znaleźć te stałe c_i, musimy rozwiązać układ 6 równań liniowych powstałych przez wstawienie $n = 0, 1, \ldots, 5$.