5. Szeregi formalne

Ten rozdział jest krótkim wprowadzeniem do następnego, omawiajacego podstawowe zastosowania funkcji tworzących w kombinatoryce. Będziemy rozważać szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \ldots .$$

Na taki szereg można patrzeć jako na funkcję zmiennej rzeczywistej x, określoną w przedziale zbieżności szeregu; przypomnijmy, że szereg potęgowy jest zbieżny w przedziale $(-R, R)$, gdzie

$$R = 1/ \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

jest liczbą nieujemną lub $R = \infty$ (to ostatnie oznacza, że szereg jest zbieżny na całej prostej rzeczywistej). Taki szereg można traktować *formalnie*, jako zapis ciągu $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, w którym stosowanie potęg zmiennej x ułatwia wykonywanie działań.

Szeregi $\sum_n a_n x^n$ i $\sum_n b_n x^n$ dodajemy w oczywisty sposób, ich suma to

$$a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots .$$

Szeregi mnożymy tak jak wielomiany (czyli także w sposób w zasadzie oczywisty), iloczyn szeregów to

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots .$$

Jeżeli oznaczymy $\sum_n c_n = (\sum_n a_n) \cdot (\sum_n b_n)$ to wzór na współczynniki c_n w iloczynie ma postać

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Przykład 5.1. Z punktu widzenia analizy wzór

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

zachodzi dla $|x| < 1$ i jest to po prostu dobrze znany wzór na sumę szeregu geometrycznego. Z punktu widzenia algebry ten wzór oznacza, że

$$(1 - x) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots) = 1,$$

proszę sprawdzić!

Przykład 5.2. Z punktu widzenia analizy wzór

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1 - 2x + x^2}$$

zachodzi dla $|x| < 1$ i wynika ze wzoru z poprzedniego przykładu poprzez różniczkowanie ‘wyrazu po wyrazie’ (i twierdzenia, że sereg potęgowy można tak różniczkować). Z punktu widzenia algebry ten wzór oznacza, że

$$(1 - 2x + x^2) \cdot (1 + 2x + 3x^2 + \ldots) = 1,$$

proszę znowy wykonać rachunek, stosując regułę mnożenia szeregów.

Przykład 5.3. Sprawdźmy, że na szeregu $\sum_n a_n x^n$ można wykonać działanie $1/\sum_n a_n x^n$ jeśli tylko $a_0 \neq 0$. Istotnie, aby $(\sum_n a_n) \cdot (\sum_n b_n) = 1$ musi być $a_0 b_0 = 1$ (czyli $b_0 = 1/a_0$). Dalej $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$, co pozwala wyliczyć b_1 i analogicznie dla następnych współczynników.

W dalszym ciągu będziemy traktować szeregi tak, jak nam będzie wygodniej:-)

6. Funkcje tworzące

Zaczniemy po prostu od definicji.

Definicja 6.1. Dla danego ciągu liczb $a_0, a_1, a_2, \ldots$ szereg $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nazywamy fubkcją tworzącą tego ciągu.

Aby zrozumieć zalety funkcji tworzących rozważymy kilka przykładów (w tym rozdziale nie ma twierdzeń); zaczniemy od przykładu prostego i dobrze już znanego.

Przykład 6.2. Niech a_n będzie ciągiem Fibonacciego: $a_0 = a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ funkcją tworzącą tego ciągu. Znajdziemy zależność na $f(x)$ wykorzystując rekurencję:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = 1 + x + (a_1 + a_0)x^2 + (a_2 + a_1)x^3 + \ldots =$$

$$= 1 + x + x(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) + x^2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots =$$

$$= 1 + x + x(f(x) - 1) + x^2 f(x).$$

Otrzymujemy

$$f(x) = 1 + xf(x) + x^2 f(x), \text{ po przekształceniu } f(x) = 1/(1 - x - x^2).$$

W ten sposób, uwzględniając własności ciągu a_n, znaleźliśmy jawny wzór na $f(x)$. Teraz przedstawimy wynik w postaci szeregu: Oznaczając przez p_1, p_2 pierwiastki wielomianu w mianowniku, czyli równania $x^2 + x - 1 = 0$ mamy

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = -\frac{1}{(p_1 - x)(p_2 - x)} = \frac{1}{p_1 - p_2}\left[\frac{1}{p_1 - x} - \frac{1}{p_2 - x}\right].$$

Dalsze proste przekształecenia pozwalają zapisać

$$f(x) = \frac{A}{1 - cx} + \frac{B}{1 - dx},$$

dla pewnych stałych A, B, c, d. Teraz, stosując wzór na sumę szeregu geometrycznego,

$$f(x) = A(1 + cx + c^2 x^2 + \ldots) + B(1 + dx + d^2 x^2 + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} (Ac^n + Bd^n)x^n,$$

co ostatecznie daje $a_n = Ac^n + Bd^n$.

To jest trochę dłuższa droga niż poprzednia (patrz jednorodne rekurencje liniowe), ale chodzi o ilustrację nowego podejścia: Znajdujemy *inny* sposób obliczenia funkcji tworzącej i w ten sposób potrafimy zapisać współczynniki jawnym wzorem.

Przykład 6.3. Zobaczmy, że funkcje tworzące pozwalają dobrać się do liczb Catalana. Rozwiążemy rekurencję

$$c_0 = 0, c_1 = 1, c_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i},$$

taką, jak w wyjściowym zagadnieniu o ilości nawiasów (przypominam, że na liście zadań numeracja była przesunięta).

Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$. Podstawowy pomysł: rekurencja Catalana pojawia sie przy liczeniu $f(x) \cdot f(x)$.

$$f^2(x) = c_1^2 x^2 + (c_1c_2 + c_2c_1)x^3 + (c_1c_3 + c_2c_2 + c_3c_1)x^4 + \ldots =$$

$$= c_1^2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots = f(x) - x.$$

Otrzymujemy $f^2(x) - f(x) + x = 0$. Rozwiązując to równanie względem $f(x)$ mamy

$$f(x) = 1/2 \pm 1/2\sqrt{1-4x}.$$

Rozwiązanie z '+' odrzucamy, pytanie dlaczego? W tym miejscu wykorzystamy wzór

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n,$$

o którym była mowa przy okazji uogólnionych symboli Newtona. Wstawiamy do wzoru $a = 1/2$ oraz $-4x$ w miejsce x i otrzymujemy

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4)^n x^n.$$

Z uwagi na to, że $f(x) = 1/2 - 1/2\sqrt{1-4x}$ pozwala to napisać

$$c_n = (-1/2)(-4)^n \binom{1/2}{n}.$$

Pozostaje sprawdzić, że to ostatnie wyrażenie jest równe $1/n\binom{2(n-1)}{n-1}$, zgodnie z oczekiwaniem.

W przykładach często otrzymujemy wzór na fukcję tworzącą w postaci $f(x) = p(x)/q(x)$, gdzie $p(x), q(x)$ są wielomianami. Zachodzi potrzeba rozkładu $p(x)/q(x)$ ta **ułamiki proste**, tak jak w przypadku liczenia całek nieoznaczonych z funkcji wymiernych. Mam nadzieję, że wspominał o tym wykład z analizy. Na wszelki wypadek: podstawowe informacje można znaleźć tutaj

`https://pl.wikipedia.org/wiki/U%C5%82amki_proste`

Zilustrujemy ten proces przykładem.

Przykład 6.4. Rozwiążmy rekurencję $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + n$ (załóżmy, że nie udało się zgadnąć wyniku:-)

Uwzględniając rekurencję w funkcji tworzącej mamy

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots =$$

$$= 1 + (2a_0 + 0)x + (2a_1 + 1)x^2 + (2a_2 + 2)x^3 + \ldots =$$

$$= 2x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) + (1 + x^2 + 2x^3 \ldots) = 2xf(x) + 1 + \frac{x^2}{(1-x)^2},$$

gdzie w drugie części zastosowaliśmy wzór z Przykładu 5.2. Stąd

$$f(x)(1-2x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2}, \text{ czyli } f(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-2x)(1-x)^2}.$$

Przedstawiliśmy więc funkcję tworzącą jako iloraz dwóch wielomianów. Teraz szukamy rozkładu na ułamiki proste, ogólna teoria mówi że są one postaci

$$f(x) = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{(1-x)^2};$$

zauważmy, jak trzeba traktować pierwiastek podwójny w mianowniku. Prawą stronę powyżej sprowadzamy do wspólnego mianownika. Wielomian, jaki pojawi się w liczniku przyrównujemy do $1 - 2x + 2x^2$. Powstaje układ trzech równań liniowych na A, B, C. Proszę sprawdzić, że otrzymamy w ten sposób rozkład

$$f(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ostatni wzór pozwala rozwinąć $f(x)$ w szereg; stosując znane już wzory

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = 2\left[1 + 2x + (2x)^2 + \ldots\right] - \left[1 + 2x + 3x^2 + \ldots\right]$$

Ostatecznie, porównując współczynniki po obu stronach, otrzymujemy $a_n = 2^{n+1} - (n+1)$.

Zakończymy rozdział popularnym zadaniem o wydawaniu reszty. Jak widzieliśmy, zagadnienie *ile jest ciągów złożonych z 'monet' 1,2,5 o sumie* n opisuje się prostą rekurencją liniową (gdzie a_n jest interesującą nas wielkościa)

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-5},$$

która można rozwiązać w postaci sumy szeregów potęgowych (patrz jednorodne liniowe rekurencje liniowe). Ale jeżeli zapytamy *na ile sposobów można wydać resztę* n *zł monetami 1,2,5* to jest to zupełnie inne zagadnienie, tutaj kolejność nie jest istotna. Dla przykładu $5 = 1+2+1+1 = 2+1+1+1$ (różne ciągi, ale ta sama reszta, jedna dwuzłotówka i trzy monety jednozłotowe).

Oznaczmy przez b_n ilość sposobów wydania n zł monetami 1,2,5. Dla przykładu $b_0 = 1$ (jest dokładnie jeden sposób **niewydawania** reszty :-), $b_1 = 1, b_2 = 2$.

Zauważmy, że funkcja tworząca tego ciągu spełnia zależność

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + \ldots).$$

Wyjaśnienie jest proste: po wymnożeniu szeregów po prawej stronie współczynnik przy x^n będzie ilością jednomianów $x^p x^{2q} x^{5r}$ spełniających zależność $p + 2q + 5r = n$, czyli ilością reszt właśnie. Oznacza to że

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}.$$

W ten sposób uzyskaliśmy szybko jawny wzór na funkcje tworzącą interesującego nas ciągu. Rozłożenie prawej strony wzoru na ułamki proste jest co prawda uciążliwe, ale wykonalne.

Przykład jest dość szczegółowo omówiony w książce *Matematyka konkretna* autorów R.L. Graham, D.E. Knuth i O. Patashnik. W tej książce jest też ciekawy ideologicznie sposób wprowadzenia funkcji tworzących do kombinatoryki[1].

[1]biblioteki chwilowo nie działają, ale zainteresowani potrafią zapewne do tej ksiązki dotrzeć