1. Inne rekurencje. Liczby Catalana

Technologia rozwiązywania rekurencji załamuje sie nawet w przypadku, gdy po prawej stronie równania rekurencyjnego pojawi się stały wyraz. Rozważmy następujący przykład.

Przykład 1.1. Wieże w Hanoi. To jest klasyczny przykłąd opisany szczegółowo w Wikipedii, proszę przeczytać `https://pl.wikipedia.org/wiki/Wie%C5%BCe_Hanoi`

Prowadzi on do rekurencji $x(n) = 2x(n-1)+1$, przy czym $x(1) = 1$. Zauważmy, że żaden ciąg geometryczny takiej rekurencji nie spełnia. Z drugiej strony nie jest trudno znaleźć rozwiązanie $x(n) = 2^n - 1$. Zgodnie z podaną legendą, liczba $2^{64} - 1$ daje nadzieję, że przeżyjemy epidemię![1]

Omówimy teraz ważny przykład rekurencji (daleko) nieliniowych.

Przykład 1.2. Wstawianie nawiasów. Mając liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, obliczamy ich iloczyn $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Na ile sposobów mozemy to zrobić? Onaczmy tę liczbę roboczo przez $x(n)$. Mnożenie jest łączne i przemienne; dla $n = 1$ oczywiście $x(1) = 1$; dla $n = 2$ są dwa sposoby $a_1 \cdot a_2$, $a_2 \cdot a_1$ więc $x(2) = 2$. Dla trzech liczb sposobów jest więcej:

$$(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3, \quad a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3), \quad a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2), \ldots$$

Aby policzyć $x(n)$ udowodnimy, że

$$x(n) = [4(n-2) + 1 + 1]\, x(n-1). \tag{1.1}$$

Myślimy rekurencyjnie; rozpatrzmy dowolny sposób pomnożenia liczb $a_1, \ldots, a_{n-1}$ i zastanówmy się, na ile sposobów możemy 'wplątać' a_n do tych obliczeń. Są dwa zewnętrzne sposoby: mnożymy koncowy wynik z lewej lub prawej strony przez a_n. Stąd $+1 + 1$ we wzorze. Wielkość $4(n-2)$ bierze się stąd, że przy liczeniu $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$ mamy $n-2$ pośrednich monożeń postaci $A \cdot B$ i przy każdej okazji możemy wplątać a_n na cztery sposoby: $(a_n \cdot A) \cdot B$, $(A \cdot a_n) \cdot B$. $A \cdot (a_n \cdot B)$, $A \cdot (B \cdot a_n)$. Jeśli to uzasadnienie 1.1 nie jest jasne, to warto rozważyć np. $n = 6$ i przykładowy sposób mnożenia pięciu liczb: $(a_1 \cdot a_2) \cdot [(a_c \cdot a_4) \cdot a_5$ — tutaj są trzy posrednie wyniki itd.

Wzór 1.1 daje $x(n) = (4n-6) \cdot x(n-1)$ oraz

$$x(n) = (4n-6) \cdot x(n-1) = (4n-6) \cdot (4n-10) \cdot x(n-2) \cdot \ldots 6 \cdot 2 =$$
$$= 2^{n-1}(2n-3)(2n-5) \cdot \ldots 3 \cdot 1 = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!},$$

proszę sprawdzić ostatnią równość. W razxie trudności można pokazać indukcyjnie, że

$$x(n) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}.$$

Definicja 1.3. Liczbę Catalana C_n definiujemy jako liczbę sposobów wstawienia nawiasów do $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, czyli liczbę sposobów policzenia wyniku **bez zmieniania kolejności wyrazów**.

[1] Pisane w marcu 2020 — stąd ten optymizm...

Twierdzenie 1.4. *Liczby Catalana C_n spełniają równanie*

$$C_n = C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_1, \tag{1.2}$$

przy czym $C_1 = 1$. Zachodzi wzór

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}. \tag{1.3}$$

Dowód. Aby wyjaśnić rekurencję 1.2 wystarczy zauważyć, że składnik $C_k C_{n-k}$ wylicza liczbę nawiasów przy najbardziej zewnętrznym nawiasie $(a_1 \cdot \ldots \cdot a_k) \cdot (a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_n)$.

Wzór 1.3 wynika z wyliczeń z przykładu 1.2; oczywiśce $C_n = x(n)/n!$ skoro teraz mamy nie zmieniać kolejności. Dlatego

$$C_n = x(n)/n! = \frac{1}{n!}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1};$$

proszę sprawdzić ostatnią równość. $\square$

Uwaga 1.5. Powyższa definicja liczb Catalana jest jedną z możliwych. Okazuje się, że wiele zagadnień prowadzi do tej samej rekurencji 1.2 i, tym samym, do liczb Catalana. Przykłady są na liście zadań. Czasami zaczynamy ciąg Catalana od 0, wtedy $C_0 = 1$ i we wzorze jawnym powstaje przesunięcie (patrz lista zadań. Taka wersja liczb Catalana jest omawiana w Wikipedii, `https://pl.wikipedia.org/wiki/Liczby_Catalana`