Symbole Newtona

1. Znaleźć wzór na $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^k$ i $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}10^k$.

2. Używając argumentacji kombinatorycznej udowodnić tożsamość dla $n \geqslant 3$ (w podanej formie)

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$

`Wskazówka:` Niech S będzie zbiorem z 3 wyróżnionymi elementami $a,\ b$ i c.

3. Wyprowadzić wzór

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

`Wskazówka 1:` zróżniczkować $(1+x)^n$. `Wskazówka 2:` Jesteś szefem zespołu n pracowników. Oblicz na ile sposobów możesz dać pewnej liczbie osób podwyżkę i dodatkowo jedną z tych osób awansować.

4. Przypomnijmy, że dla $x \in \mathbb{R}$ i naturalnej liczby $k \geqslant 1$ definiujemy

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$

Dodatkowo, $\binom{x}{0} = 1$ i $\binom{x}{-k} = 0$. Udowodnić, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x i wszystkich liczb całkowitych k i m zachodzą wzory

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}, \quad \binom{-x}{k} = (-1)^k\binom{x+k-1}{k}, \quad \binom{x}{m}\binom{m}{k} = \binom{x}{k}\binom{x-k}{m-k}.$$

5. Używając argumentacji kombinatorycznej, pokazać, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych $m_1,\ m_2$ i n mamy

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k} = \binom{m_1+m_2}{n}.$$

6. Znaleźć wzór na

$$\sum_{\substack{r,\ s,\ t \geqslant 0 \\ r+s+t=n}} \binom{m_1}{r}\binom{m_2}{s}\binom{m_3}{t},$$

gdzie sumowanie odbywa się względem wszystkich nieujemnych liczb całkowitych $r,\ s$ i t spełniających $r+s+t=n$.

7. Sprawdzić przez indukcję wzór

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

8. Obliczyć sumę $1^2+2^2+\ldots+n^2$ korzystając ze wzoru $m^2 = 2\binom{m}{2}+\binom{m}{1}$ oraz z poprzedniego zadania.

Zbiory z powtórzeniami

9. Wyznaczyć liczbę 11 elementowych wariacji (z powtórzeniami) zbioru z powtórzeniami $S = \{3 \cdot a,\ 4 \cdot b,\ 5 \cdot c\}$. Wyznaczyć też liczbę 10 elementowych takich wariacji.

10. Wyznaczyć liczbę wszystkich kombinacji (dowolnego rozmiaru) zbioru z powtórzeniami $S = \{n_1 \cdot a_1, \ldots, n_k \cdot a_k\}$.

11. Wyznaczyć liczbę r elementowych kombinacji zbioru $\{1 \cdot a_1,\ \infty \cdot a_2,\ \ldots,\ \infty \cdot a_k\}$. Ogólniej, wyprowadzić wzór na liczbę r-kombinacji zbioru, w którym liczby powtórzenia są równe 1 lub ∞.

12. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ w nieujemnych liczbach całkowitych.

13. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ w liczbach całkowitych takich, że $1 \leqslant x_1$, $0 \leqslant x_2$, $4 \leqslant x_3$ i $2 \leqslant x_4$.

Zasada włączeń i wyłączeń

14. Niech A_1, A_2, A_3 będą podzbiorami zbioru skończonego X. Sprawdzić, że

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

15. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1 i 10 000 (włącznie), niepodzielnych przez 4, 5 ani 6 ?

16. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1 i 10 000 (włącznie), które nie kwadratami ani sześcianami liczb całkowitych ?

17. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ w nieujemnych liczbach całkowitych nie przekraczających 8.

18. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ w liczbach całkowitych takich, że $1 \leqslant x_1 \leqslant 6$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 7$, $4 \leqslant x_3 \leqslant 8$ i $2 \leqslant x_4 \leqslant 6$.