

NIEPORZĄDKI

Poniżej D_n oznacza liczbę *nieporządków* na zbiorze n -elementowym, czyli liczbę permutacji bez punktu stałego. Jak pamiętamy (?!), z zasady włączeń i wyłączeń wynika wzór

$$D_n = n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

1. Wyznaczyć liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, 8\}$, w których żadna liczba parzysta nie znajduje się na swojej naturalnej pozycji.
2. Znaleźć ogólny wzór na liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, w których dokładnie k liczb znajduje się na swoich naturalnych pozycjach.
3. Udowodnić kombinatorycznie, że

$$n! = \binom{n}{0} D_0 + \binom{n}{1} D_1 + \binom{n}{2} D_2 + \dots + \binom{n}{n-1} D_{n-1} + \binom{n}{n} D_n.$$

(Pamiętajmy, że $D_0 = 1$.)

4. Na wykładzie omówiono kombinatoryczny dowód rekurencji $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$ dla $n \geq 3$; *jak to było?*

Udowodnić, że $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

REKURENCJE LINIOWE I INNE

5. Rozwiązać równania rekurencyjne

$$(i) \quad x(n) = x(n-1) + 9x(n-2) - 9x(n-3),$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \text{ i } x(2) = 2;$$

$$(ii) \quad x(n) = 3x(n-2) - 2x(n-3),$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 0 \text{ i } x(2) = 0;$$

$$(iii) \quad x(n) = 5x(n-1) - 6x(n-2) - 4x(n-3) + 8x(n-4),$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 1 \text{ i } x(3) = 2;$$

$$(iv) \quad x(n) = 4x(n-2),$$

$$x(0) = 0 \text{ i } x(1) = 1;$$

$$(v) \quad x(n) = 8x(n-1) - 16x(n-2),$$

$$x(0) = -1 \text{ i } x(1) = 0.$$

6. Rozważmy szachownicę $1 \times n$. Każde pole szachownicy jest pomalowane na czerwono lub niebiesko tak, że nie ma dwu sąsiednich czerwonych kwadratów. Niech $g(n)$ oznacza liczbę takich pokolorowań. Wyznaczyć wzór rekurencyjny i jawny na $g(n)$.
7. Dla $n = 1, 2, 3, \dots$ niech $h(n)$ oznacza liczbę różnych sposobów pokolorowania pól szachownicy $1 \times n$ barwami białą, niebieską i czerwoną tak, że nie ma dwu sąsiednich czerwonych kwadratów. Znaleźć wzór na $h(n)$.

8. Znaleźć wzór rekurencyjny na liczbę ciągów o sumie n , takich że
- (a) wyrazami ciągu są 1 i 2;
 - (b) wyrazami ciągu są 1, 2, 5.
9. Znaleźć wzór rekurencyjny na liczbę ciągów długości n złożonych z 0, 1 i 2 takich, że bezpośrednio na lewo od 2 nie może znajdować się 1.
10. Niech $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 2, \dots$ będą liczbami Fibonacciego. Znaleźć (zwarte) wzory na poniższe sumy:
- (i) $f(1) + f(3) + \dots + f(2n - 1)$;
 - (ii) $f(0) + f(2) + \dots + f(2n)$;
 - (iii) $f(0) - f(1) + f(2) - \dots + (-1)^n f(n)$;
 - (iv) $f(0)^2 + f(1)^2 + \dots + f(n)^2$;
 - (v) $f(n)f(n+2) + (-1)^{n+1}$.
11. Rozwiązać podane równania rekurencyjne przez znalezienie kilku pierwszych wyrazów, odgadnięcie wzoru i udowodnienie go przez indukcję.
- (i) $H(n) = H(n-1) - n + 3$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$; $H(0) = 2$.
 - (ii) $H(n) = -H(n-1) + 1$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$; $H(0) = 0$.
 - (iii) $H(n) = -H(n-1) + 2$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$; $H(0) = 1$.
 - (iv) $H(n) = 2H(n-1) + 1$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$; $H(0) = 1$.
12. Udowodnić, że ciąg $\sqrt{6}, \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \dots$ jest zbieżny do liczby 3. Skąd to zadanie się tu wzięło?

ZADANIA UZUPEŁNIAJĄCE

13. Dla liczby naturalnej n oznaczmy przez Q_n liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, które nie zawierają w sobie 12, 23, $\dots$, $(n-1)n$. (Dla $n = 3$ dopuszczalnymi permutacjami są 213, 321, 132, ale np. 231 jest niedopuszczalna.) Pokazać, że dla $n \geq 1$ zachodzi wzór
- $$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \binom{n-1}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} 1!.$$
14. Żaba siedzi na wierzchołku ośmiokąta foremego i zamierza dostać się na przeciwległy wierzchołek w n skokach, za każdym razem skacząc na jeden z sąsiednich wierzchołków. Na ile sposobów może to zrobić?
15. (Zadanie J. Dymary.) W pierwszym roku zimnej wojny Amerykanie mają 2 rakiety, a Rosjanie 14. Co roku Amerykanie produkują tyle rakiet, ile Rosjanie mieli rok wcześniej (tak więc np. w drugim roku będą mieli 2 stare + 14 nowych = 16 rakiet). Rosjanie za to pilnują, aby zawsze mieć dwa razy tyle, ile Amerykanie mieli rok wcześniej (czasem wymagać to może częściowej demilitaryzacji; na przykład w drugim roku Rosjanie będą mieć $2 \cdot 2 = 4$ rakiety, ale za to w trzecim $2 \cdot 16 = 32$ rakiety). Znajdź wzór opisujący liczbą amerykańskich rakiet w n -tym roku zimnej wojny.