G. PLEBANEK	*Kombinatoryka (R)*	NR 6

Uwaga: Ciąg liczb Catalana (na ogół) numerujemy od 0, przyjmując $C_0 = 1$. Wtedy rekurencja Catalana ma postać

$$\text{(RC)} \quad C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} C_0;$$

czyli $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$ etc. Jawny wzór: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
(W zagadnieniu omawianym na wykładzie, o wstawianiu nawiasów, liczyliśmy od 1 i dlatego występowało przesunięcie).

1. Rozważmy spacery po kracie od punktu $(0,0)$ do (n,n), za każdym razem posuwamy się o jeden w prawo lub do góry (jak ta sekretarka na Manhattanie). Udowodnić, że C_n jest liczbą spacerów niewychodzących ponad przekątną.

WSKAZÓWKA: Sprawdzamy (RC) powyżej. Zauważyć, że składnik $C_{k-1}C_{n-k}$ we wzorze wylicza liczbę tych spacerów, kóre wchodzą na przekątna w punkcie (k,k), a wcześniej, po opuszczeniu początku tego nie robiły.

2. Pokaż, że następujące liczby są liczbami Catalana (w razie problemów z interpretacją załóżmy, że $C_0 = C_1 = 1$):

(i) liczba połączeń w pary wierzchołków wypukłego $2n$-kąta, tak by odpowiadające mu przekątne (lub boki) się nie przecinały,

(ii) liczba podziałów $(n+2)$-kąta wypukłego przekątnymi na trójkąty,

(iii) liczbie ciągów $(x_1, \ldots, x_{2n})$ (słów Dycka), takich że

$$x_i \in \{-1, 1\}, \quad \sum_{i=1}^{2n} x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant 0 \text{ dla każdego } k \leqslant 2n.$$

3. Znajdź (*wygooglaj*) inne kombinatoryczne interpretacje liczb Catalana, na przykład ilość drzew binarnych.

4. Ustawiamy jednakowe monety w piramidki tak, że powstaje (górski lub nizinny) krajoobraz. W najniższej warstwie znajduje się n monet ułożonych jedna obok drugiej w linii, a każda moneta w następnej warstwie musi się opierać na dwu połówkach monet leżących poniżej. Ile kształtów powstanie?

5. Mrówka błądzi po prostej, przesuwając się o 1 w prawo lub w lewo. Zaczyna w 0, a w -1 znajduje się droga na wolność (więc błądzenie się kończy). Na ile sposobów mrówka dotrze do wyjścia dokładnie w $2n+1$ ruchach?

6. Sprawdzić, że $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$. Posługując się tą zależnością wyprowadź (w inny sposób) wzór jawny na C_n.

WSKAZÓWKA: Rozważyć spacery z zadania 1: Policzyć wszystkie i te 'złe', wychodzące ponad przekątną.

7. Udowodnij kombinatorycznie, że liczba wszystkich funkcji niemalejących $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie $n \geqslant 1$, spełniających warunek $f(i) \leqslant i$ dla $i \leqslant n$, wynosi $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

8. Rozważmy permutację kołową zbioru z powtórzeniami $\{n \cdot a, (n+1) \cdot b\}$; inaczej mówiąc rozsadzamy n liter a i $n+1$ liter b na krzesłach przy okrągłym stole.

Udowodnić, że istnieje dokładnie jedno krzesło, od którego licząc i poruszając się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, napotkamy zawsze więcej liter b.

Udowodnić, że C_n jest liczbą permutacji kołowych zbioru z powtórzeniami $\{n \cdot a, (n+1) \cdot b\}$.

9. Niech S_n oznacza liczbę (nieuporządkowanych) par spacerów (γ_1, γ_2) długości n na płaszczyźnie o tej własnośći, że każdy spacer wykonuje kroki tylko w prawo lub w góre długości jeden, spacery zaczynają się w punkcie $(0, 0)$ i mają wspólne tylko końce. Jak liczby S_n są związane z liczbami Catalana?