Imię i nazwisko	Grupa	Nick	zad. 1	zad. 2	zad. 3	zad. 4

1. Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną półprostych postaci $(-\infty, a)$, gdzie $a \geqslant 0$ jest liczbą wymierną. Wyjaśnić **szczegółowo**, dlaczego każdy przeliczalny zbiór $A \subseteq (0, \infty)$ należy do $\sigma(\mathcal{P})$, σ-ciała generowanego przez $\mathcal{P}$.

2. Niech μ będzie addytywną (oczywiście nieujemną) funkcją zbioru, określoną na ciele $\mathcal{A}$ podzbiorów X, taką że $\mu(X) = 1$. Udowodnić, że jeżeli zbiory $A_1, \ldots, A_{2026} \in \mathcal{A}$ spełniają warunek $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ dla dowolnych $i \neq j$ to

$$\sum_{i=1}^{2026} \mu(A_i) \leqslant 1.$$

3. Uzasadnić krótko poniższe stwierdzenia dotyczące miary Lebesgue'a λ i zbioru borelowskiego $A \subseteq (0, \infty)$, takiego że $\lambda(A) = 1$.

(a) $\lambda(A \cap (1/n, n)) > 3/4$ dla pewnej liczby naturalnej n;

(b) Istnieje zbiór domknięty $F \subseteq [0, 2] \setminus A$; taki że $\lambda(F) > 3/4$;

(c) A jest sumą skończenie wielu rozłącznych zbiorów miary mniejszej niż $1/4$.

4. Niech $f_n : X \to [0, \infty)$ będzie ciągiem nieujemnych funkcji, mierzalnych względem σ–ciała Σ podzbiorów X. Sprawdzić bezpośrednio (wypisując odpowiedni wzór), że następujące zbiory należą do Σ:

(i) $A = \{x \in X : \sup_n f_n(x) > 3\}$;

(ii) $B = \{x \in X : \sup_n f_n(x) \geqslant 3\}$;

(iii) $C = \{x \in X : \sum_n f_n(x) = \infty\}$.

Zadanie dodatkowe. Dana jest przestrzeń probabilistyczna (X, Σ, μ) i zbiory $A_n \in \Sigma$. Udowodnić, że jeżeli szereg $\sum_n \mu(A_n)$ jest zbieżny to

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0, \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_{7k}\right) = 0.$$

INSTRUKCJA: Pracę należy podpisać i oddać tę kartkę. Można podać rozwiązania na odwrocie i dołączonych kartkach.

Nick= pseudonim, pozwalający upublicznić wynik (przykłady: *Hiszpańska Inkwizycja, Ciara i Małka*).