O przestrzeniach Banacha i algebrach Boole'a

Grzegorz Plebanek

Insytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

19 października 2012

Klasyczne przestrzenie Banacha

$$c_0 = \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_n x_n = 0\}, \quad ||x|| = \sup_n |x_n|;$$

$$l_p = \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n |x_n|^p < \infty\},\ ||x||_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p};$$

$$l_\infty = \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_n |x_n| < \infty\},\ ||x||_\infty = \sup_n |x_n|;$$

$$C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f\,\text{ciągła}\},\ ||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Pewne ogólne pytania

- Czy każda przestrzeń Banacha X jest izomorficzna ze swoją hiperpłaszczyzną?
- Czy przestrzeń Banacha X, która jest izomorficzną z każdą swoją nieskończenie wymiarową podprzestrzenią, jest izomorficzna z l_2?
- Czy każda przestrzeń Banacha X "zawiera" c_0 lub l_p?
- Czy każdą ośrodkową przestrzeń można zbudować z "elementarnych" przestrzeni Banacha?
- Czy na każdej przestrzeni Banacha można określić "nietrywialny" operator?

Słowniczek

Operator T z X na Y jest izomorfizmem jeśli $m \cdot ||x|| \leqslant ||Tx|| \leqslant M \cdot ||x||$.
Hiperpłaszczyzna $H = \{x \in X : x^*(x) = 0\}$.
"X zawiera Y" oznacza "istnieje podprzestrzeń X_0 izomorficzna z Y".

Dopełnialność, rozkładalność

- Podprzestrzeń $Y \subseteq X$ jest **dopełnialna** jeśli istnieje podprzestrzeń $Z \subseteq X$, taka że $Y = Y \oplus Z$.
- Przestrzeń X jest **rozkładalna** jeśli $X = Y \oplus Z$ dla pewnych nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni Y, Z.

Uwagi

- Każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń jest dopełnialna.
- Jeśli $T : c_0 \to X$ jest izomorficznym zanurzeniem w przestrzeń ośrodkową X to $T[c_0]$ jest dopełnialną podprzestrzenią X.
- c_0 nie jest dopełnialna w l_∞.
- $Y \subseteq X$ jest dopełnialna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje projektor $P : X \overset{na}{\to} Y$ (projektor, czyli $P \circ P = P$).
- Jeśli każda podprzestrzeń przestrzeni Banacha X jest dopełnialna to X jest p. Hilberta (Lindestrauss, Tzafriri).

Timothy Gowers & Bernard Maurey na koniec milenium

- Istnieje **dziedzicznie nierozkładalna** przestrzeń X_{GM}.
- X_{GM} nie może zawierać żadnych klasycznych przestrzeni.
- X_{GM} nie jest izomorficzna ze swoją hiperpłaszczyzną (czyli $X_{GM} \not\simeq X_{GM} \oplus \mathbb{R}$).
- Każdy operator $T : X_{GM} \to X_{GM}$ jest postaci $T = c \cdot I + S$, gdzie S jest czysto singularny.
- G & M + Komorowski & Tomczak-Jaegermann: jeżeli p. Banacha X jest izomorficzna z każdą swoją niesk. wym. podprzestrzenią to $X \simeq l_2$.

Jak to się robi?

Znajdź $X_0 \subseteq c_{00} = \{x \in c_0 : (\exists N)(\forall n \geqslant n) x_n = 0\}$.
Zdefiniuj pewną normę $|| \cdot ||$ na X_0.
Uzupełnij X_0 do X.

Spiros Argyros & Richard Haydon na początek nowego milenium

Istnieje przestrzeń X_{AH}, taka że każdy operator $T : X_{AH} \to X_{AH}$ jest postaci $T = c \cdot I + S$, gdzie operator S jest zwarty.

Operatory zwarte i inne

- Operator $T : X \to X$ jest zwarty jeżeli $\overline{T[B_X]}$ jest normowo zwarty.
- Operator $T : X \to X$ jest słabo zwarty jeżeli $\overline{T[B_X]}$ jest słabo zwarty.
- Każdy operator będący granicą operatorów skończenie wymiarowych jest zwarty.

Przestrzenie $C(K)$

Dla dowolnej (nieskończonej) przestrzeni zwartej K, $C(K)$ oznacza przestrzeń Banacha funkcji ciągłych na K, z normą supremum.
Przestrzeń $C(K)$ jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy gdy K jest kompaktem metrycznym.
Twierdzenie Miljutina: *Jeżeli K jest nieprzeliczalnym kompaktem metrycznym to $C(K) \simeq C[0,1]$.*

Operatory $C(K) \to C(K)$

Dla ustalonej funkcji $g \in C(K)$, $T(f) = g \cdot f$ definiuje operator ograniczony; $T = g \cdot I$.

Fakt. *Operator $T : C(K) \to C(K)$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_n ||T(f_n)|| = 0$ dla dowolnego ograniczonego ciągu (f_n) w $C(K)$ funkcji parami rozłącznych ($f_i \cdot f_j = 0$ dla $i \neq j$).*

Dla każdej nieskończonej przestrzeni K istnieje operator słabo zwarty $T : C(K) \to C(K)$, który nie jest zwarty.

Twierdzenie Koszmidera. **Przy założeniu CH**

Iistnieje nieskończona przestrzeń zwarta K, taka że każdy operator $T : C(K) \to C(K)$ jest postaci $T = g \cdot I + S$, gdzie $g \in C(K)$ i S jest słabo zwarty.
W szczególności $C(K) \not\simeq C(K) \oplus \mathbb{R}$.
Istnieje taka przestrzeń K, która jest dodatkowo spójna; wtedy $C(K)$ jest nierozkładalną przestrzenią Banacha i dlatego $C(K) \not\simeq C(L)$ dla zwartej zerowymiarowej przestrzeni L.

Uwagi

Jeżeli $\varphi : K \to K$ jest homeomorfizmem to operator $f \to f \circ \varphi$ nie jest słabo zwartą perturbacją mnożenia przez funkcję.
Jeżeli K zawiera nietrywialny ciąg zbieżny to $C(K) \simeq c_0 \oplus X \simeq \mathbb{R} \oplus c_0 \oplus X \simeq \mathbb{R} \oplus C(K)$.
Przestrzeń Koszmidera jest więc sztywna i nie zawiera ciągów zbieżnych.
Taka przestrzeń K nie zawiera "zbyt wielu" kopii $\beta\mathbb{N}$. (Problem Efimova: czy każda niesk. zwarta K zawiera ciąg zbiezny albo kopię $\beta\mathbb{N}$).

Jak konstruować przestrzenie zwarte o zadanych własnościach?

Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą Boole'a (w $\mathfrak{A}$ określone są działania $\wedge, \vee, -$, mające własności dodawania i mnożenia zbiorów oraz brania dopełnienia w ustalonej przestrzeni X).

Typowy przykład: algebra miary. $\mathfrak{A} = Bor[0,1]/(\lambda = 0)$. Dla $a \in \mathfrak{A}$ mamy $a = [A] = \{B \in Bor[0,1] : \lambda(A \triangle B) = 0\}$; $[A] \wedge [B] = [A \cap B]$ itd.

Twierdzenie Stone'a

Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z ciałem zbiorów otwarto-domkniętych przestrzeni zwartej całkowicie niespójnej $K = \mathrm{ult}(\mathfrak{A})$.

Przykłady

$\beta\mathbb{N}$ jest przestrzenią Stone'a algebry Boole'a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; co więcej $l_\infty \cong C(\beta\mathbb{N})$.
Jeśli K jest przestrzenią Stone'a algebry miary to $L_\infty[0,1] \cong C(K)$.

Uwagi

Jeżeli K jest przestrzenią całkowicie niespójną to funkcje ciągłe proste, czyli postaci $\sum_{i=1}^{n} r_i \chi_{A_i}$, $A_i \in \mathrm{clopen}(K)$ leżą gęsto w $C(K)$.
Jeżeli $K = \mathrm{ult}(\mathfrak{A})$ to elementy $a \in \mathfrak{A}$ definiują zbiór liniowo gęsty w $C(K)$.

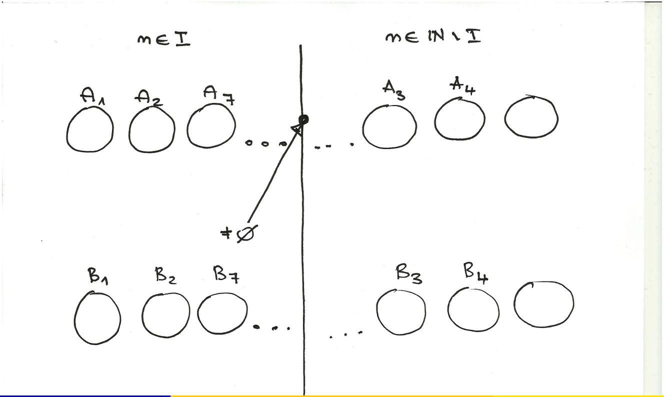
Konstrukcja przestrzeni Koszmidera, tymczasowo całk. niespójnej

- Wyróżnić pewną listę własnosci topologicznych przestrzeni K, które wymuszają żądaną postać operatorów na $C(K)$.
- Wyrazić te własności w języku zbiorów otwarto-domkniętych.
- Skonstruować algebrę Boole'a $\mathfrak{A}$ majacą analogiczne własności
- $K := \mathrm{ult}(\mathfrak{A})$.

Przykładowa własność

Jeżeli rodzina $\{A_n, B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{clopen}(K)$ jest parami rozłączna to istnieje nieskończony zbiór $I \subseteq \mathbb{N}$, taki że

$$\overline{\bigcup_{n\in I} A_n} \cap \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus I} A_n} \neq \emptyset; \quad \overline{\bigcup_{n\in I} B_n} \cap \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus I} B_n} = \emptyset.$$



Przykładowa własność

Jeżeli rodzina $\{A_n, B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{clopen}(K)$ jest parami rozłączna to istnieje nieskończony zbiór $I \subseteq \mathbb{N}$, taki że

$$\overline{\bigcup_{n\in I} A_n} \cap \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus I} A_n} \neq \emptyset; \quad \overline{\bigcup_{n\in I} B_n} \cap \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus I} B_n} = \emptyset.$$

Tłumaczenie

Jeżeli $\{a_n, b_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathfrak{A}$ jest parami rozłączna to dla pewnego $I \subseteq \mathbb{N}$

(i) $\bigvee_{n\in I} b_n$ istnieje w $\mathfrak{A}$, ale

(ii) nie istnieje $x \in \mathfrak{A}$ o własności $a_n \leqslant x$ dla $x \in I$, $a_n \wedge x = 0$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus I$.

Przestrzeń spójna

Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą pewnej miary. Zbiór $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{A}$ jest kratą jeśli $0, 1 \in \mathfrak{L}$ i $\mathfrak{L}$ jest zamknieta na działania $\wedge, \vee$.
Zbiór $\mathfrak{L}^c = \{a : -a \in \mathfrak{L}\}$ też tworzy kratę.
Powiedzmy, że $\mathfrak{L}$ jest

- spójna jeśli $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^c = \{0, 1\}$;
- normalna jeśli dla dowolnych rozłącznych $a, b \in \mathfrak{L}$ istnieją rozłączne $u, v \in \mathfrak{L}^c$, takie że $a \subseteq u, b \subseteq v$.

Reprezentacja Wallmana

Dla każdej spójnej i normalnej kraty $\mathfrak{L}$ istnieje przestrzeń spójna K, taka że $\mathfrak{L}$ jest izomorficzna z pewną rodziną domkniętych podzbiorów K.