Ćwiczenia 9.12.2009: zad. 286-308 Kolokwium nr 10, 15.12.2009: materiał z zad. 1-308

Ćwiczenia 16.12.2009: zad. 309-329 Kolokwium nr 11, 22.12.2009: materiał z zad. 1-329

Kolokwium nr 12, 5.01.2010: materiał z zad. 1-343

Ćw. 23.12.2009, 6.01.2010 : zad. 348-370 Kolokwium nr 13, 12.01.2010: materiał z zad. 1-370

Szeregi liczbowe (c.d.).

Obliczyć sumę szeregu

286. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\cdot(-1)^n}{n(n+1)}$ **287.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

Wyznaczyć kresy zbiorów

288. $\left\{ \sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{1}{2}\right)^n : N \in \mathbb{N} \right\}$ **289.** $\left\{ \sum_{n=M}^{N} \left(-\frac{1}{2}\right)^n : M,N \in \mathbb{N} \wedge M<N \right\}$

290. $\left\{ \sum_{n=M}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n : M \in \mathbb{N} \right\}$

Funkcje. Granica i ciągłość.

Uwaga: Zapis $\mathrm{sgn}(x)$ oznacza znak liczby x:

$\mathrm{sgn}(x) = 1$ dla $x > 0$

$\mathrm{sgn}(x) = 0$ dla $x = 0$

$\mathrm{sgn}(x) = -1$ dla $x < 0$

Uwaga: Zapis $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

$\{x\} = x - [x]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Naszkicować wykres funkcji f danej wzorem

291. $\mathrm{sgn}(\sin x)$ **292.** $\{x\} - (\{x\})^2$

293. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x<0 \\ x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ -x^2+4x-2 & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 3 \\ 4-x & \text{dla} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$

294. $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \neq 2 \\ \mathrm{sgn}(x) & \text{dla} \quad x = 2 \end{cases}$ **295.** $\frac{x^4-1}{x^2-1}$ **296.** $\frac{1}{\{x\}}$

297. $\mathrm{sgn}(x^3-x)$ **298.** $x^3\mathrm{sgn}(x)$ **299.** $\left|\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\right|$

300. $f(x) = |x^2-1| - |x^2-4|$ **301.** $f(x) = |x^2-8x+15|$

302. $f(x) = x^2+x+2-|x^2-x-2|$ **303.** $f(x) = \{\cos x\}$

304. $f(x) = [\frac{4}{\pi}\mathrm{arctg} x]$ **305.** $f(x) = 2\{\sin x\} - \{2\sin x\}$

306. $f(x)=[x]+x$ **307.** $f(x)=\{x\}+x$ **308.** $f(x)=\left[\left|x-\frac{1}{2}\right|\right]$

Obliczyć następujące granice:

309. $\lim\limits_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7}-\frac{8}{x^2-6x-7}\right)$ **310.** $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ **311.** $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}$

312. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ **313.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x+2}$ **314.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}$

315. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ **316.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2008}-1}{x^{10}-1}$ **317.** $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

318. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ **319.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **320.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

321. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ **322.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **323.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **324.** $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1+\ln x}$

325. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **326.** $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **327.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$

328. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2 & \text{dla} \quad 1\leqslant x<2 \\ ax-b & \text{dla} \quad 2\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b), dla których funkcja f jest ciągła.

329. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2+ax+b & \text{dla} \quad 1\leqslant x<2 \\ x+3 & \text{dla} \quad 2\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b), dla których funkcja f jest ciągła.

Konwersatorium 10,17.12.2009, 7.01.2010 (do zad. 347)

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ, aby

$$\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

330. $f(x)=2x$, $x_0=5$, $\varepsilon=1/10$ **331.** $f(x)=1/x$, $x_0=4$, $\varepsilon=1/100$

332. $f(x)=x^2$, $x_0=1$, $\varepsilon=1/50$ **333.** $f(x)=x^3$, $x_0=0$, $\varepsilon=1/1000$

334. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=30$, $\varepsilon=1/10$ **335.** $f(x)=x^4$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{-10}$

Oszustwo **336.** (przykład funkcji nieciągłej): Funkcja $f(x)=x^2$ jest nieciągła.

Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zakładając, że funkcja f jest ciągła, weźmy w definicji Cauchy'ego ciągłości $\varepsilon=1$. Wtedy istnieje takie $\delta>0$, że dla y spełniających nierówność $|y-x|<\delta$ zachodzi $|x^2-y^2|<1$.

Jednak ta ostatnia nierówność nie zawsze jest prawdziwa, gdyż dla $x>\frac{1}{\delta}$ i $y=x+\frac{\delta}{2}$ otrzymujemy $|x^2-y^2|=x\delta+\frac{\delta^2}{4}>1$.

□

Oszustwo **337.** (przykład funkcji ciągłej): Funkcja

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$$

jest ciągła.

Dowód: Oczywiście f jest ciągła w każdym punkcie oprócz 0, pozostaje więc wykazać ciągłość w 0. Przeprowadzimy dowód niewprost. Zakładając, że f jest nieciągła w 0, weźmy $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Wtedy istnieje takie $\delta>0$, że dla x spełniających nierówność $|x|<\delta$ zachodzi $|f(x)-0|\geqslant\frac{1}{2}$.

Ale biorąc $x=\frac{1}{\pi n}$, gdzie $n>\frac{1}{\pi\delta}$, otrzymujemy $f(x)=0$ i $|x|<\delta$. Zatem $|f(x)-0|=0<\frac{1}{2}$, skąd sprzeczność.

□

Wskazać taką liczbę M, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)|\leqslant M\,.$$

338. $f(x)=\dfrac{2x^4+13x^2+7}{5x^4+x^2+2}$ **339.** $f(x)=\dfrac{5x^4+x^2+2}{2x^4+13x^2+7}$ **340.** $f(x)=e^{\sin x}$

341. $f(x)=\dfrac{x}{x^4+3}$ **342.** $f(x)=\dfrac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

Oszustwo**343.** Niech $f,g:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(0)=5$, $f(1)=7$, $g(0)=8$, $g(1)=4$. Wtedy istnieje takie $c\in(0,1)$, że $f(c)=g(c)$.

Dowód: Z własności Darboux funkcji ciągłych zastosowanej do funkcji f wynika, że dla pewnego $c\in(0,1)$ mamy $f(c)=6$. Podobnie, stosując własność Darboux do funkcji g otrzymujemy $g(c)=6$. A zatem
$f(c)=g(c)$, co należało dowieść.

□

Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu i podać poprawny dowód.

344. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000}+2=(1{,}000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

345. Dla których liczb

$$n\in\left\{2, 4, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 10^5, 10^{10}, 10^{30}, 10^{100}, 10^{1000}\right\}$$

wykres funkcji

$$f(x)=2^x$$

przecina wykres funkcji

$$g(x)=x^n+4\,,$$

jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm. Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

Jak zmieni się odpowiedź, gdy wykonamy rysunek biorąc za jednostkę na osiach średnicę atomu (10^{-8} cm) lub średnicę jądra atomowego (10^{-13} cm)?

346. Dowieść, że równanie

$$x^2=25\pi^2\cdot\cos x$$

ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

347. Dowieść, że równanie

$$x^2=25\pi^2\cdot\cos\left(x^3\right)$$

ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

348. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\dfrac{x}{2}$ **349.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ **350.** $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+5x+4}+|x|$

351. $f(x)=\log_4(2^x+8^x)$

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie $k\in\mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta=10^{-k}$ spełniony był warunek

$$\underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall}|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

352. $f(x)=x^{10}$, $x_0=2$, $\varepsilon=1/10$ **353.** $f(x)=x^{100}$, $x_0=5$, $\varepsilon=10^{-10}$

354. $f(x)=x^{1000}$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)

355. $f(x)=x^{1/10}$, $x_0=1111$, $\varepsilon=10^{-5}$

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f,g,h są określone w otoczeniu punktu $x_0\in[-\infty,+\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$$

dla x bliskich x_0, to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)\,.$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

356. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x^{1000})}{\sqrt{x}}$ **357.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cdot\left\{1/x^{1000}\right\}$ (uwaga: część ułamkowa)

Korzystając ze zbieżności

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

obliczyć

358. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}}$ **359.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}}$

360. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x+1}}{(x+1)^x}$ **361.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ **362.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}$

363. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot f(x)}$, gdzie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

364. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}$ **365.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$

Dla podanej funkcji f wyprowadzić oszacowanie postaci

$$|f(x)-f(x_0)|<C\cdot\delta$$

prawdziwe dla dowolnego $\delta>0$ oraz dowolnych $x,x_0\in D_f$ spełniających warunek $|x-x_0|<\delta$. W czterech zadaniach C jest liczbą rzeczywistą dodatnią, w jednym wyrażeniem zależnym od x_0.

366. $f(x)=\sqrt{x}$, $D_f=[1,+\infty)$

367. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

368. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

369. $f(x)=x^3$, $D_f=\mathbb{R}$

370. $f(x)=x^3$, $D_f=[-10,5]$