Algebra IR - Lista 10

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane). Niech R i S będą pierścieniami przemiennymi z 1.

1. Załóżmy, że R jest *pierścieniem Boole'a*, czyli że dla każdego $r \in R$ zachodzi $r^2 = r$.
   (a) Udowodnić, że dla każdego $r \in R$ zachodzi $r + r = 0$.
   (b) Dla dowolnego zbioru A znaleźć strukturę pierścienia Boole'a na zbiorze wszystkich podzbiorów A.
2. Udowodnić, że $R[\![X]\!]$ z działaniami podanymi na wykładzie jest pierścieniem przemiennym z 1 i że $R[X]$ jest podpierścieniem $R[\![X]\!]$.
3. Wskazać wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między zbiorem szeregów formalnych n zmiennych zdefiniowanym rekurencyjnie przez $R[\![X_1, \ldots, X_n]\!] = R[\![X_1, \ldots, X_{n-1}]\!][\![X_n]\!]$ oraz zbiorem wszystkich funkcji z $\mathbb{N}^n$ w R. Wywnioskować, że elementy pierścienia $R[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ można przedstawiać jako zapisy
$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{i_1,\ldots i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n},$$
   gdzie $a_{i_1 \ldots i_n} \in R$. Podać wzory na $+$ oraz $\cdot$ w $R[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ używając powyższej notacji.
4. Udowodnić, że jeśli R jest dziedziną, to $R[\![X]\!]$ jest dziedziną.
5. Niech $F = \sum a_i X^i \in R[\![X]\!]$. Udowodnić, że $F \in R[\![X]\!]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \in R^*$.
6. Niech R będzie dziedziną i $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in R[X]$. Udowodnić, że $P \in R[X]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = \ldots = a_n = 0$ i $a_0 \in R^*$.
7. Znaleźć R oraz $a \in R \setminus \{0\}$ takie, że $1 + aX \in R[X]^*$.
8. Dla każdej liczby pierwszej p znaleźć pierścień R mocy p oraz wielomian $f \in R[X]$ stopnia p, taki że związana z nim funkcja wielomianowa $\bar{f} \colon R \to R$ jest tożsamościowa równa 0.
9. Udowodnić, że jeśli R jest skończony, to R jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy R jest dziedziną.