Algebra IR - Lista 12

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane). Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1.

1. Niech $\phi\colon R \to S$ będzie epimorfizmem pierścieni, gdzie R jest noetherowski. Udowodnić, że S też jest noetherowski.

2. Znaleźć podpierścień $R \subseteq \mathbb{Z}[X]$, taki że R nie jest noetherowski.

3. Niech $\mathcal{L}$ będzie łańcuchem (względem inkluzji) złożonym z ideałów pierścienia R. Dowieść, że $\bigcup \mathcal{L}$ też jest ideałem R.

4. Niech $I, J \trianglelefteq R$. Dowieść, że $I + J = (I \cup J)$.

5. Udowodnić, że 3 jest rozkładalny i że 5 jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

6. Zbadać, czy dana liczba jest elementem rozkładalnym pierścienia R.

   (a) $7 + \sqrt{-5}$, $2 + 3\sqrt{-5}$, $5 + 4\sqrt{-5}$; $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

   (b) $-1 + 7i$, 5, 23, $1 + 6i$; $R = \mathbb{Z}[i]$.

   Wsk. Skorzystać z zadania 6 z listy 11.

7. Wyznaczyć z dokładnością do stowarzyszenia wszystkie elementy nierozkładalne w $K[\![X]\!]$.

8. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) p jest elementem rozkładalnym $\mathbb{Z}[i]$,

   (b) p jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych,

   (c) p przystaje do 1 modulo 4.

   Wsk. Dowód (c) $\to$ (a) przeprowadzić nie wprost. Jako krok pośredni udowodnić, że przy założeniu (c) liczba -1 jest resztą kwadratową modulo p, czyli $p \mid n^2 + 1$ dla pewnej liczby całkowitej n.

9. Wywnioskować, że pośród liczb pierwszych jest nieskończenie wiele:

   (a) elementów nierozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$,

   (b) elementów rozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$.