Algebra IR - Lista 13

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane). Niech R będzie dziedziną.

1. Udowodnić, że pierścień $K[X^2, X^3]$ nie jest UFD.
2. Niech R będzie UFD i $a, b \in R$. Udowodnić, że ideał $(a) \cap (b)$ jest główny.
3. Niech S będzie podzbiorem multyplikatywnym R. Udowodnić, że:
   (a) dla $I \trianglelefteqslant R_S$ zachodzi $(I \cap R)R_S = I$,
   (b) istnieje naturalny monomorfizm $f\colon R_S \to R_0$,
   (c) jeśli R jest PID, to R_S też jest PID.
4. Wywnioskować z poprzedniego zadania, że $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ jest UFD.
5. Dla każdej liczby pierwszej p w naturalny sposób utożsamiamy $\mathbb{Z}_{(p)}$ z podpierścieniem ciała $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że

$$\bigcap_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z},$$

   gdzie $\mathbb{P}$ jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych.