Algebra IR - Lista 14

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane). Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1. Gdy R jest dziedziną, przez K oznaczamy ciało ułamków R (tzn. $K = R_0$).

1. Niech S będzie podzbiorem multyplikatywnym R. Definiujemy relację $\sim$ na $R \times S$ przez $(r,s) \sim (r',s') \iff (\exists s'')(s''(rs' - r's) = 0)$. Udowodnić, że jest to relacja równoważności. Na $(R \times S)/\sim$ definiujemy $+$ i $\cdot$ jak w przypadku lokalizacji dla dziedzin. Udowodnić, że działania te są dobrze zdefiniowane. Łatwo pokazać, że spełniają one aksjomaty pierścienia: sprawdzić ulubiony aksjomat.

2. Załóżmy, że R jest UFD. Niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem reprezentantów klas abstrakcji relacji stowarzyszenia na zbiorze wszystkich elementów nierozkładalnych R. Uzasadnić, że każdy element $K \setminus \{0\}$ zapisuje się jednoznacznie (z dokładnością do kolejności czynników) jako produkt $a = \epsilon \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p}$, gdzie $\epsilon \in R^*$ i wszystkie $v_p \in \mathbb{Z}$.
   Uwaga. Dzięki temu otrzymaliśmy na wykładzie funkcję $v_p \colon K \to \mathbb{Z}$ (waluację p-adyczną), która posłużyła do zdefiniowania funkcji cont: $K[X] \setminus \{0\} \to K \setminus \{0\}$.

3. Załóżmy, że R jest UFD. Niech $\mathcal{P}$ będzie jak w zadaniu 2. Udowodnić następujące własności waluacji v_p (dla $p \in \mathcal{P}$) oraz funkcji cont, gdzie a, b są dowolnymi elementami $K \setminus \{0\}$, a f, g – dowolnymi niezerowymi wielomianami w $K[x]$.
   (a) $a \in R \iff (\forall p \in \mathcal{P})(v_p(a) \geqslant 0)$.
   (b) $(\forall p \in \mathcal{P})(v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b))$.
   (c) $\mathrm{cont}(f) \in R \iff f \in R[X]$. (To było udowodnione na wykładzie.)
   (d) $\mathrm{cont}(f) \in R^* \iff \mathrm{cont}(f) = 1$.
   (e) $\mathrm{cont}(\mathrm{cont}(a)) = \mathrm{cont}(a)$.
   (f) $\mathrm{cont}(ab) = \mathrm{cont}(a)\mathrm{cont}(b)$. (To było udowodnione na wykładzie.)
   (g) $\mathrm{cont}(1/a) = 1/\mathrm{cont}(a)$.
   (h) Jeśli $f = a_0 + \cdots + a_n X^n \in R[X]$, to $(\mathrm{cont}(f) = 1 \iff (\forall p \in \mathcal{P})\neg(p|a_0 \wedge \cdots \wedge p|a_n))$.
   (i) Jeśli $f, g \in R[X]$ i $\mathrm{cont}(f) = \mathrm{cont}(g) = 1$, to $\mathrm{cont}(fg) = 1$.

   Uwaga. Na wykładzie był udowodniony lemat Gaussa, mówiący, że dla $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$ zachodzi cont(fg) = cont(f)cont(g). Powyższe własności były potrzebne w dowodzie tego lematu i innych twierdzeń. Zostały one słownie uzasadnione na wykładzie, a na ćwiczeniach trzeba je dokładniej udowodnić (oprócz (c) i (f)).

4. Niech p będzie liczbą pierwszą. Korzystajac z kryterium Eisensteina, udowodnić, że wielomian $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ jest nierozkładalny zarówno w $\mathbb{Q}[X]$, jak i w $\mathbb{Z}[X]$.

5. Znaleźć NWD i NWW dla:
   (a) $X^4 - X,\ X^6 - X$ w $\mathbb{C}[X]$,
   (b) $X^4 - X,\ X^6 - X$ w $\mathbb{C}[\![X]\!]$,
   (c) $4 - 2i,\ 13 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$,

6. Znaleźć największy wspólny dzielnik liczb 114 i 78 oraz przedstawić go w postaci $114a + 78b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{Z}$.

7. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez $2, 3, 5, 7$ daje odpowiednio reszty $1, 2, 3, 4$.

8. Udowodnić, że
$$\mathbb{Q}[X,Y]/(XY) \ncong \mathbb{Q}[X,Y]/(X) \times \mathbb{Q}[X,Y]/(Y) \cong \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[Y].$$