Algebra R - Lista 3

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane).

1. Niech $\cdot\colon G \times X \to X$ będzie dowolną funkcją. Definiujemy $\psi\colon G \to X^X$ przez $\psi(g)(x) := g \cdot x$. Dowieść, że następujące warunki są równoważne.
   (a) $\cdot$ jest lewym działaniem G na X.
   (b) $\psi[G] \subseteq S_X$ oraz $\psi\colon G \to S_X$ jest homomorfizmem.

2. Niech $\mathrm{DA}(G, H)$ będzie zbiorem wszystkich działań G na H przez automorfizmy, a $\mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(H))$ – grupą wszystkich homomorfizmów z G w grupę $\mathrm{Aut}(H)$. Dowieść, że funkcje
$$F\colon\ \mathrm{DA}(G,H) \to \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(H)) \quad \text{oraz} \quad F'\colon\ \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(H)) \to \mathrm{DA}(G,H)$$
zadane wzorami $F(\cdot)(g)(h) = g \cdot h$ oraz $F'(\psi)(g,h) = \psi(g)(h)$ są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami.
Wsk. Z analogicznego faktu z wykładu dla działania grupy G na zbiorze X wywnioskować, że wystarczy udowodnić, że $F[\mathrm{DA}(G,H)] \subseteq \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(H))$ oraz $F'[\mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(H))] \subseteq \mathrm{DA}(G,H)$ i udowodnić te zawierania.

3. Dwa elementy $a, b \in G$ nazywamy *sprzężonymi*, gdy istnieje $g \in G$, takie że $gag^{-1} = b$. Zauważyć, że elementy a i b są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy leżą w tej samej orbicie względem działania grupy na sobie przez automorfizmy wewnętrzne. Wywnioskować, że relacja sprzężenia jest relacją równoważności, a jej klasy abstrakcji są orbitami tego działania: klasa abstrakcji a to orbita a, czyli zbiór $\{gag^{-1} : g \in G\} = \{g^{-1}ag : g \in G\} =: a^G$, czyli jest to klasa sprzężoności a (zgodnie z terminologią z wykładu).

4. (a) Znaleźć i udowodnić kryterium na to, kiedy dwa elementy w grupie S_n są sprzężone. Jako wniosek opisać klasy sprzężoności w grupie S_n.
   Wsk. Zastosować rozkłady na cykle rozłączne.
   (b) Które z poniższych par permutacji są sprzężone? W przypadku gdy dane permutacje są sprzężone, znaleźć element, który je sprzęga.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ oraz } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ oraz } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Udowodnić, że wszystkie automorfizmy S_3 są wewnętrzne.

6. Niech G będzie grupą. Załóżmy, że istnieje $g \in G$, taki że $\mathrm{rząd}(g) \neq 1, 2$. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(G) \neq \{\mathrm{id}_G\}$.

7. Załóżmy, że grupa G działa na zborze X. Dowieść, że stabilizatory elementów leżących w jednej orbicie mają równą moc.
Wsk. Dla elementów x, y z tej samej orbity wyrazić G_y w terminach G_x.

8. Opisać orbity działania $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$.

9. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną. Udowodnić, że poniższy wzór
$$\forall a \in A \qquad 0 \cdot a = a, \quad 1 \cdot a = -a$$
zadaje działanie $\mathbb{Z}_2$ na A poprzez automorfizmy. Wskazać odpowiadający temu działaniu homomorfizm $\Psi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(A)$. Kiedy Ψ jest monomorfizmem?

10. Wyznaczyć centrum S_3 i centrum D_4.

11. Niech $H \leqslant G$. Udowodnić bezpośrednio (tzn. nie odwołując sie do tw. Lagrange'a), że $|G/H| = |H\backslash G|$.