Algebra IR - Lista 4

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane).

1. Udowodnić, że jeśli rząd grupy G jest liczbą pierwszą, to G jest cykliczna.
2. Niech N będzie podgrupą grupy G. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne.
   (a) $N \trianglelefteq G$ (tzn. dla każdego $g \in G$, $g^{-1}Ng \subseteq N$).
   (b) Dla każdego $g \in G$, $gNg^{-1} \subseteq N$.
   (c) Dla każdego $g \in G$, $gNg^{-1} = N$.
   (d) Dla każdego $g \in G$, $g^{-1}Ng = N$.
   (e) Dla każdego $g \in G$, $gN = Ng$.
3. Niech $f\colon G \to H$ będzie homomorfizmem grup. Udowodnić, że $\ker(f) \leqslant G$ oraz $\mathrm{im}(f) \leqslant H$.
4. Udowodnić, że jeśli $H \leqslant G$ oraz $[G : H] = 2$, to $H \trianglelefteq G$.
5. Udowodnić, że $T_n(\mathbb{R})$ nie jest dzielnikiem normalnym w $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
6. Korzystając z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmie grup, udowodnić że:
   (a) $(\mathbb{R}^*, \cdot)/\{1, -1\} \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$,
   (b) $(\mathbb{C}, +)/\mathbb{Z} \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$,
   (c) $(\mathbb{C}^*, \cdot)/\langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$.
7. Korzystając z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmie grup, znaleźć:
   (a) wszystkie homomorfizmy z S_3 w $\mathbb{Z}_2$,
   (b) wszystkie homomorfizmy z S_3 w $\mathbb{Z}_6$.
8. Udowodnić następujące stwierdzenia.
   (a) Dla każdego $k \in \mathbb{Z}_n$ funkcja
   $$\phi_k : (\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{Z}_n, +_n), \quad \phi_k(x) = k \cdot_n x$$
   jest endomorfizmem.
   (b) Jeśli $\phi : (\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{Z}_n, +_n)$ jest endomorfizmem, to istnieje $k \in \mathbb{Z}_n$, takie że $\phi = \phi_k$.
   (c) Jeśli $k, l \in \mathbb{Z}_n$, to $\phi_k \circ \phi_l = \phi_{k \cdot_n l}$.
   (d) Jeśli $k \in \mathbb{Z}_n^*$, to $\phi_k \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n, +_n)$.
   (e) Funkcja
   $$\Phi : \mathbb{Z}_n^* \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n, +_n), \quad \Phi(k) = \phi_k$$
   jest izomorfizmem.
9. Niech p będzie liczbą pierwszą i załóżmy, że $|G| = p^2$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ lub $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.
10. Udowodnić, że
   $$(\mathbb{Z}_2, +_2) \times (\mathbb{Z}_3, +_3) \cong (\mathbb{Z}_6, +_6), \quad \text{ale} \quad (\mathbb{Z}_2, +_2) \times (\mathbb{Z}_2, +_2) \not\cong (\mathbb{Z}_4, +_4).$$
   Jak można uogólnić ten wynik?
11. Niech N będzie podgrupą grupy G. Udowodnić, że $N_G(N) \leqslant G$. Czemu jest równe $N_G(N)$, gdy $N \trianglelefteq G$?
12. Podać przykład grupy G i jej podgrupy H, taki że:
   (a) $N_G(H) = H$,
   (b) $H \lneq N_G(H) \lneq G$.