Algebra IR - Lista 5

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane).

1. Załóżmy, że grupa H działa przez automorfizmy na grupie N. Dowieść, że elementem odwrotnym do (n, h) w otrzymanym iloczynie półprostym $N \rtimes H$ jest element $(h^{-1} \cdot n^{-1}, h^{-1})$.

2. Załóżmy, że $\cdot_1$ jest działaniem przez automorfizmy grupy H_1 na grupie N_1. Niech $f\colon H_1 \to H_2$ oraz $g\colon N_1 \to N_2$ będą izomorfizmami. Definiujemy
$$h_2 \cdot_2 n_2 := g(f^{-1}(h_2) \cdot_1 g^{-1}(n_2)).$$
   (a) Sprawdzić, że $\cdot_2$ jest działaniem przez automorfizmy grupy H_2 na N_2.
   (b) Udowodnić, że funkcja $F\colon N_1 \rtimes_{\cdot_1} H_1 \to N_2 \rtimes_{\cdot_2} H_2$ zadana wzorem $F((n_1, h_1)) = (g(n_1), f(h_1))$ jest izomorfizmem.

3. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$.

4. Niech $\varphi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ będzie działaniem z zad. 9 z listy 3. Udowodnić, że $D_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$.

5. Udowodnić, że $A_4 \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3$.

6. Niech G będzie podgrupą grupy $S_\mathbb{R}$ składającą się z bijekcji *afinicznych*, tzn. postaci $x \mapsto ax + b$. Udowodnić, że $G \cong (\mathbb{R}, +) \rtimes (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

7. Niech G będzie grupą rzędu 8. Załóżmy, że $g \in G$ jest elementem rzędu 4 i że wszystkie elementy z $G \setminus \langle g \rangle$ są rzędu 4. Dowieść, że $g^2 \in Z(G)$.

8. Niech $H_1 \trianglelefteq H, G_1 \trianglelefteq G$. Udowodnić, że $H_1 \times G_1 \trianglelefteq H \times G$ oraz (korzystając z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmach grup), że
$$(H \times G)/(H_1 \times G_1) \cong (H/H_1) \times (G/G_1).$$

9. Niech $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$ będzie działaniem. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne.
   (a) Grupa $H \rtimes_\varphi G$ jest przemienna.
   (b) Grupy H i G są przemienne oraz działanie φ jest trywialne.

10. Niech $\Psi\colon G \to H$ będzie epimorfizmem. Załóżmy, że istnieje *cięcie* Ψ, tzn. homomorfizm $s\colon H \to G$, taki że $\Psi \circ s = \mathrm{id}_H$. Opisać naturalne działanie H na $\ker(\Psi)$ i udowodnić, że
$$G \cong \ker(\Psi) \rtimes H.$$

11. Uzasadnić, że w każdym wierszu w klasyfikacji grup rzędu $\leqslant 8$ podanej na wykładzie wypisane są parami nieizomorficzne grupy.