# Algebra IR - Lista 6

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane). Niech $G$ i $H$ będą grupami, a $p$ – liczbą pierwszą.

1. Udowodnić, że centrum dowolnej nietrywialnej $p$-grupy jest nietrywialne.
2. Niech $\varphi : G \to H$ będzie homomorfizmem, a $N \leqslant H$. Dowieść, że wtedy:
   (a) jeśli $G$ jest skończona i $\varphi$ jest epimorfizmem, to $|\varphi^{-1}[N]| = |\ker(\varphi)||N|$,
   (b) jeśli $N \trianglelefteq H$, to $\varphi^{-1}[N] \trianglelefteq G$.
3. Niech $g \in G$ będzie elementem rzędu 2. Udowodnić, że:
   (a) Jeśli $g$ jest jedynym elementem rzędu 2 w $G$, to $g \in Z(G)$.
   (b) $\langle g \rangle \trianglelefteq G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \in Z(G)$.
4. Załóżmy, że $|G| = pq$, gdzie $p, q$ są pierwsze i $p < q$. Udowodnić, że:
   (a) $G \cong \mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}_p$,
   (b) jeśli $p$ nie dzieli $q - 1$, to $G \cong \mathbb{Z}_{pq}$,
   (c) jeśli $p$ dzieli $q - 1$, to istnieje nieprzemienna grupa rzędu $pq$.
5. Opisać z dokładnością do izomorfizmu grupy rzędu mniejszego od 12.
6. Załóżmy, że $H$ jest $p$-podgrupą $G$ i że $H$ jest dzielnikiem normalnym. Udowodnić, że $H$ jest zawarta w każdej $p$-podgrupie Sylowa $G$.
7. Opisać $p$-podgrupy Sylowa $S_4$ dla różnych liczb pierwszych $p$.
8. Znaleźć wszystkie $p$-podgrupy Sylowa $S_p$. Wywnioskować, że (tw. Wilsona)
$$(p-1)! \equiv -1 (\text{mod } p).$$
9. Udowodnić, że dla każdego $n \geqslant 3$ istnieje monomorfizm $D_n \to S_n$.
10. Udowodnić, że nie istnieje monomorfizm $Q_8 \to S_4$.
11. Załóżmy, że $|G| = 196$. Udowodnić, że w $G$ istnieje dzielnik normalny rzędu 49.
12. Załóżmy, że $|G| = 36$. Udowodnić, że istnieje $N \trianglelefteq G$ taka, że $N \neq \{e\}$ i $N \neq G$.